ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

T.D. n°11

Exercice 1 ●○○ — *Équations différentielles linéaires d'ordre 1*

Résoudre les équations différentielles suivantes sur l'intervalle I spécifié :

1. $y' = y\tan t + \sin t$ avec $\mathrm{I} =]-\pi/2, \pi/2[$
2. $ty' - 2y = -\ln t$ avec $\mathrm{I} =]0, +\infty[$.

Exercice 2 ●○○ — *Équations différentielles linéaires d'ordre 2*

Résoudre les équations différentielles suivantes sur $\mathbb{R}$:

1. $y'' - 4y' + 4y = 7\sin t - \cos t$
2. $y'' - 3y' + 2y = e^t + e^{-2t}$
3. $y'' + y = \cos t$

Exercice 3 ●○○ — *Systèmes différentiels d'ordre 1*

Résoudre les systèmes différentiels suivants sur $\mathbb{R}$:

1. $\begin{cases} x' &= 2x - 2y + 2z \\ y' &= 2x - 3y + 2z \\ z' &= -x + 2y \end{cases}$
2. $\begin{cases} x' &= -x + y - z + t + 1 \\ y' &= -4x + 3y - 4z + 4t + 1 \\ z' &= -2x + y - 2z + 2t + 1 \end{cases}$

Exercice 4 ●○○ — *Recherche de solutions développables en série entière*

1. Résoudre sur $]-1, 1[$ l'équation différentielle suivante :

$$(1 - t^2)y'' - 4ty' - 2y = 0 \tag{E$_1$}$$

   On pourra chercher des solutions développables en série entière.

2. On considère l'équation différentielle suivante :

$$4ty'' + 2y' - y = 0 \tag{E$_2$}$$

   Donner une solution S de (E) développable en série entière et telle que $\mathrm{S}(0) = 1$.
   On exprimera S à l'aide des fonctions usuelles.

Exercice 5 ●●○ — *Une équation différentielle linéaire d'ordre 2 non résolue*

On cherche à résoudre l'équation différentielle suivante sur $\mathbb{R}$:

$$ty'' + (t-2)y' - 2y = 0 \tag{E}$$

1. Résoudre (E) sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\mathbb{R}_-^*$.
   On pourra chercher une solution polynomiale et une solution sous la forme $t \mapsto e^{at}$ avec $a \in \mathbb{R}$.
2. Décrire l'ensemble des solutions de (E) sur $\mathbb{R}$ et donner sa dimension.

Exercice 6 ●●○ — *Résolution par changement de fonction*

Résoudre sur $]0,+\infty[$ l'équation différentielle suivante :

$$t^2y'' + ty' - \left(t^2 + \frac{1}{4}\right)y = 0 \qquad \text{(E)}$$

On posera $y(t) = t^\alpha z(t)$ pour $t > 0$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$ bien choisi.

Exercice 7 ●●○ — *Résolution par changement de variable*

Résoudre sur $]0,+\infty[$ l'équation différentielle suivante :

$$t^2y'' + 3ty' + y = 0 \qquad \text{(E)}$$

On réalisera le changement de variable $t = e^x$, c'est-à-dire que l'on étudiera la fonction $z : x \mapsto y(e^x)$.

Exercice 8 ●●○ — *Méthode de Lagrange*

On cherche à résoudre l'équation différentielle suivante sur $]0,1[$:

$$t(1-t)y'' + (1-3t)y' - y = 0 \qquad \text{(E)}$$

1. Rechercher une solution non nulle φ de (E) développable en série entière.
2. Résoudre l'équation (E) en cherchant une autre solution sous la forme φz où z est une fonction à déterminer.

Exercice 9 ●●● — *Solutions bornées d'une équation différentielle*

On étudie l'équation différentielle suivante :

$$y'' + e^{-t}y = 0 \qquad \text{(E)}$$

1. Soit f une solution bornée de (E) sur $[0,+\infty[$.
   - **a.** Montrer que la dérivée f' admet une limite finie en $+\infty$.
   - **b.** Prouver que cette limite ℓ est nulle.
     On pourra procéder par l'absurde en supposant $\ell > 0$ puis $\ell < 0$.
2. Soit g une autre solution bornée de (E) sur $[0,+\infty[$.
   - **a.** Établir que la fonction w définie sur $[0,+\infty[$ par :

     $$\forall x \geqslant 0, \quad w(x) = \begin{vmatrix} f(x) & g(x) \\ f'(x) & g'(x) \end{vmatrix}$$

     est constante égale à 0.
   - **b.** En déduire que les fonctions f et g sont liées.
     On exploitera par exemple la nullité de $w(0)$ et on utilisera le théorème de Cauchy linéaire.
     En déduire que (E) admet des solutions non bornées sur $[0,+\infty[$.