

T.D. n°11



EXERCICE 1 ••• Équations différentielles linéaires d'ordre 1

Résoudre les trois équations différentielles suivantes sur l'intervalle I spécifié :

1. $y' + y = e^t + \sin t$ avec $I = \mathbb{R}$.
2. $2ty' - 3y = \sqrt{t}$ avec $I = \mathbb{R}_+^*$.
3. $(1 - t^2)y' - 2ty = 2t$ avec $I =]-1, 1[$, $I =]-\infty, -1[$, $I =]1, +\infty[$ puis $I = \mathbb{R}$.

EXERCICE 2 ••• Équations différentielles linéaires scalaires d'ordre 2

Résoudre les deux équations différentielles suivantes sur \mathbb{R} :

1. $y'' - 3y' + 2y = \sin t$
2. $y'' - 2y' + y = \operatorname{ch} t$

EXERCICE 3 ••• Systèmes différentiels d'ordre 1

Résoudre les quatre systèmes différentiels suivants sur \mathbb{R} :

1. $\begin{cases} x' = x + 8y + e^t \\ y' = 2x + y \end{cases}$
2. $\begin{cases} x' = 3x - 2y + 2e^t \\ y' = 4x - 3y + e^t \\ z' = -2x + y - 1 \end{cases}$
3. $\begin{cases} x' = (2 - t)x + (t - 1)y \\ y' = 2(1 - t)x + (2t - 1)y \end{cases}$
4. $\begin{cases} x' = 2x + z \\ y' = -x + y - z \\ z' = x + 2y \end{cases}$

EXERCICE 4 ••• Une équation différentielle linéaire d'ordre 2

On cherche à résoudre l'équation différentielle suivante sur \mathbb{R} :

$$4ty'' + 2y' - y = 0 \quad (\text{E})$$

1. Déterminer une solution y_0 de (E) sur \mathbb{R} développable en série entière et vérifiant $y_0(0) = 1$.
2. Sur \mathbb{R}_+^* , exprimer y_0 en fonction de la fonction ch .
3. En devinant une autre solution de (E) sur \mathbb{R}_+^* , terminer la résolution de (E) sur cet intervalle.
4. Sur \mathbb{R}_-^* , exprimer y_0 en fonction de la fonction \cos .
5. En devinant une autre solution de (E) sur \mathbb{R}_-^* , terminer la résolution de (E) sur cet intervalle.

EXERCICE 5 ••• Séries entières et équations différentielles linéaires d'ordre 2

1. Trouver par développement en série entière l'unique solution du problème de Cauchy suivant sur \mathbb{R} :

$$\begin{cases} y'' + 2ty' + 2y = 0 \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$$

2. Par développement en série entière, résoudre l'équation différentielle suivante sur \mathbb{R} :

$$(t^2 + 1)y'' + 4ty' + 2y = 1$$

EXERCICE 6 ●●○ Résolution par changement de variable

Résoudre sur \mathbb{R}_+^* les deux équations différentielles suivantes en réalisant le changement de variable $t = e^u$:

1. $t^2 y'' + y = 0$
2. $t^2 y'' + 3ty' + 4y = \cos(\ln t)$

EXERCICE 7 ●●○ Résolution par changement de fonction

Résoudre sur \mathbb{R} l'équation différentielle suivante en réalisant le changement de fonction $z = t^2 y$:

$$t^2 y'' + 4ty' - (t^2 - 2)y = e^t$$

EXERCICE 8 ●●○ Une équation différentielle linéaire scalaire d'ordre 3

Résoudre l'équation différentielle suivante en se ramenant à un système différentiel d'ordre 1 :

$$y''' - 5y'' + 7y' - 3y = 0$$

EXERCICE 9 ●●○ Une équation fonctionnelle

On cherche l'ensemble des fonctions $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continues et vérifiant la propriété (\mathcal{P}) suivante :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad f(t) + \int_0^t (x+t)f(t-x) dx = 1 \quad (\mathcal{P})$$

1. On se donne $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continue et vérifiant (\mathcal{P}) .

A. On définit la fonction g suivante :

$$g : t \mapsto \int_0^t (x+t)f(t-x) dx$$

Montrer que g est de classe \mathcal{C}^2 sur \mathbb{R} et donner g' et g'' .

B. En déduire que f vérifie l'équation différentielle $y'' + ty' + 3y = 0$ ainsi que les conditions initiales $y(0) = 1$ et $y'(0) = 0$.

C. En déduire l'expression de f à l'aide d'un développement en série entière.

2. Conclure quant au problème posé.