ESPACES PROBABILISÉS

T.D. n°12

Exercice 1 ●○○ — *Manipulation des techniques de calculs de probabilité*

1. Un logiciel informatique permet de tirer un nombre entier naturel de manière aléatoire. Pour $i \in \mathbb{N}$, la probabilité que l'ordinateur renvoie le nombre i est $1/2^{i+1}$. Vérifier que l'on définit bien ainsi une loi de probabilité.
On lance une fois ce programme, calculer la probabilité d'obtenir un nombre impair.
2. Une urne contient n boules blanches et n boules noires. On tire une à une n boules dans l'urne. Quelle est la probabilité de ne tirer que des boules blanches dans le cas d'un tirage sans remise ?
Et dans le cas d'un tirage avec remise ?
3. Un logiciel informatique permet de tirer un nombre entier naturel de manière aléatoire. Pour $k \in \mathbb{N}$, la probabilité que l'ordinateur renvoie le nombre k est $1/(k!e)$. Vérifier que l'on définit bien ainsi une loi de probabilité.
Après avoir tiré un nombre aléatoire k avec ce programme, on tire une boule dans une urne composée de k boules blanches et une boule noire. Quelle est la probabilité d'obtenir la boule noire ?

Exercice 2 ●○○ — *n clefs, une serrure*

On dispose d'un trousseau de n clefs indistinguables pour ouvrir une serrure.

1. L'expérience a lieu dans le noir et, à chaque essai, on utilise une clef choisie au hasard.
Pour $p \in \mathbb{N}^*$, déterminer la probabilité d'ouvrir la serrure au p−ème essai.
2. L'expérience a lieu le jour et on essaie donc maintenant successivement toutes les clefs.
Pour $p \in \mathbb{N}^*$, déterminer la probabilité d'ouvrir la serrure au p−ème essai.

Exercice 3 ●●○ — *Suite de jeux*

Des joueurs $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$ s'affrontent de la manière suivante : chaque manche oppose deux concurrents qui ont chacun la probabilité $\frac{1}{2}$ de gagner. La première manche oppose A_1 et A_2 et, à l'étape n, si elle a lieu, le gagnant de l'épreuve précédente affronte le joueur A_{n+1}. Le jeu s'arrête lorsque, pour la première fois, un joueur gagne deux manches consécutives.

1. Quelle est la probabilité que l'étape n ait lieu ?
2. En déduire que le jeu s'arrête presque sûrement.
3. Quelle est la probabilité que le joueur A_n gagne ?

Exercice 4 ●●○ — *Transmission d'un message*

On considère une suite de relais qui transmettent un message binaire (0 ou 1). Chaque relais est noté R_n, $n \in \mathbb{N}^*$. La probabilité pour que le relais R_n transmette correctement le message au suivant vaut $p \in]0,1[$, et la probabilité qu'il le transforme en son opposé est $1-p$. On note p_n la probabilité pour que le message arrivé au relais R_n soit identique au message arrivé en R_1.

1. Établir, pour $n \geqslant 1$, une relation de récurrence entre p_{n+1} et p_n puis en déduire la valeur de p_n.
2. Quelle est la limite de p_n lorsque n tend vers $+\infty$? Interprétation ?

Exercice 5 ●●○ *Lancer de pièce et tirages dans une urne*

On lance une seule fois une pièce équilibrée puis on effectue des tirages successifs dans une urne, contenant initialement une boule blanche et une boule noire, de la façon suivante :

- On tire une boule, on note sa couleur et on la remet dans l'urne ;
- On rajoute ensuite une boule blanche si on a obtenu pile et une boule noire si on a obtenu face ;
- On recommence pour un tirage suivant.

1. Calculer la probabilité d'obtenir une boule blanche au $k-$ème tirage.
2. Sachant que l'on a tiré une boule blanche au $k-$ème tirage, calculer la probabilité d'avoir obtenu pile.
3. Calculer la probabilité d'avoir obtenu k boules blanches lors des k premiers tirages.

Exercice 6 ●●○ *Marche aléatoire sur un triangle*

On considère une particule se déplaçant à chaque seconde sur l'un des trois sommets A, B et C d'un triangle suivant le procédé suivant :

- si la particule se trouve en B, elle y reste ;
- si la particule se trouve en A, elle se rend la seconde suivante sur l'un des trois sommets du triangle de façon équiprobable ;
- si la particule se trouve en C, à la seconde suivante, elle y reste une fois sur trois, sinon elle va en B sept fois plus souvent qu'en A.

À la seconde 0, la particule se pose de façon équiprobable sur un des trois sommets. Pour tout $n \geqslant 0$, on note A_n (resp. B_n, C_n) l'événement « À la n-ième seconde, la particule se trouve en A » (resp. B et C), et on note a_n, b_n et c_n les probabilités respectives de A_n, B_n et C_n.

1. Que valent a_0, b_0 et c_0 ?
2. Donner une relation de récurrence entre a_{n+1}, b_{n+1}, c_{n+1} et a_n, b_n et c_n pour $n \geqslant 0$.
3. Pour $n \geqslant 0$, on introduit le vecteur $\mathrm{X}_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.
   Donner une matrice $\mathrm{M} \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $\mathrm{X}_{n+1} = \mathrm{M}\mathrm{X}_n$ pour $n \geqslant 0$.
4. En déduire X_n puis la valeur de a_n, b_n et c_n pour $n \geqslant 0$.
5. Étudier la convergence des suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et interpréter le résultat.

Exercice 7 ●●○ *Schéma Pile – Pile dans une série de Pile ou Face*

On joue à *Pile* ou *Face* avec une pièce équilibrée. Pour $n \geqslant 1$, on s'intéresse à l'événement E_n : « Lors des n premiers lancers, il n'a pas été observé deux *Pile* consécutifs » et on note $p_n = \mathrm{P}(\mathrm{E}_n)$.

1. Trouver une relation de récurrence vérifiée par la suite $\left(p_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$.
2. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} p_n$ et interpréter le résultat.