Exercice 11

Pour $n \geqslant 1$, on pose :

A_n : " on a obtenu un nombre pair de Pile aux lancers 1 à n "

P_n : " on obtient Pile au lancer n "

On a : $A_{n+1} = (A_n \cap \overline{P_{n+1}}) \cup (\overline{A_n} \cap P_{n+1})$

L'union étant disjointe, on a par σ-additivité :

$$P(A_{n+1}) = P(A_n \cap \overline{P_{n+1}}) + P(\overline{A_n} \cap P_{n+1})$$

Par indépendance des lancers 1 à n et $n+1$, il vient :

$$P(A_{n+1}) = P(A_n)P(\overline{P_{n+1}}) + P(\overline{A_n})P(P_{n+1})$$

En notant $a_n = P(A_n)$:

$$a_{n+1} = \left(1 - \frac{1}{2n+3}\right)a_n + \frac{1}{2n+3}(1-a_n)$$

$$\Leftrightarrow \quad a_{n+1} = \frac{2n+1}{2n+3}a_n + \frac{1}{2n+3}$$

Si $u_n = (2n+1)a_n$, on obtient : $u_{n+1} = u_n + 1$.

La suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est donc arithmétique de raison 1 et $u_1 = 3a_1$

$$= 3 \cdot \frac{2}{3}$$

$$= 2$$

Ainsi : $u_n = (n-1) + 2 = n+1$ pour $n \geqslant 1$.

Finalement : $\forall n \geqslant 1, \quad a_n = \dfrac{n+1}{2n+1}$.