Lycée Descartes
Tours

VARIABLES ALÉATOIRES DISCRÈTES

PSI
2024 – 2025

T.D. n°13

Exercice 1 ●○○ — *Étude d'une variable aléatoire discrète sur ℕ*

Soit $a \in \mathbb{R}$. On se donne une variable aléatoire discrète X à valeurs dans ℕ telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \mathrm{P}(\mathrm{X}=n) = \frac{a}{n(n+1)(n+2)}$$

1. Déterminer la valeur de a pour que la définition de X soit valable.
2. Étudier si la variable X admet une espérance et la donner le cas échéant.
3. On pose $\mathrm{Y} = \mathrm{X}^2 - 6\mathrm{X} + 9$. Déterminer la loi de Y et donner son espérance si elle en admet une.

Exercice 2 ●○○ — *Loi conjointe et lois marginales*

Soit $a \in \mathbb{R}$. On se donne deux variables aléatoires discrètes X et Y à valeurs dans ℕ telles que la loi conjointe de (X,Y) soit donnée par :

$$\forall (j,k) \in \mathbb{N}^2, \quad \mathrm{P}(\mathrm{X}=j, \mathrm{Y}=k) = \frac{a(j+k)}{2^{j+k}}$$

1. Déterminer la valeur de a pour que la définition de X et Y soit valable.
2. Donner les lois marginales de X et Y.
3. Déterminer si les variables X et Y sont indépendantes.
4. Calculer $\mathrm{P}(\mathrm{X}=\mathrm{Y})$.

Exercice 3 ●○○ — *Dès truqués dans une urne*

Une urne contient un dé truqué donnant systématiquement un 6. On lance une pièce équilibrée. Si l'on obtient *Face*, on ajoute un dé équilibré dans l'urne et l'on relance la pièce. Si l'on obtient *Pile*, on tire un dé dans l'urne et on lance celui-ci. On note X la variable aléatoire donnant le nombre de dés dans l'urne lorsqu'on y pioche un dé et Y la variable aléatoire donnant la valeur du dé lancer.

1. Donner la loi de X.
2. Déterminer ensuite la loi de Y.

Exercice 4 ●●○ — *Manipulation de lois géométriques*

On se donne X et Y deux variables aléatoires indépendantes à valeurs dans ℕ suivant une loi géométrique de paramètres respectifs $p \in]0,1[$ et $q \in]0,1[$. On pose alors :

$$\mathrm{U} = \min(\mathrm{X},\mathrm{Y}) \qquad \text{et} \qquad \mathrm{V} = \max(\mathrm{X},\mathrm{Y}) - \min(\mathrm{X},\mathrm{Y})$$

1. Donner la loi du couple (U,V).
2. Déterminer les lois des variables U et V.
3. Étudier si les variables U et V sont indépendantes.

Exercice 5 ●●○ *Conditionnement Poissonnien*

Le nombre N de visiteurs quotidiens entrant dans une boulangerie suit une loi de Poisson de moyenne $\lambda > 0$. Chaque client a la probabilité $p \in]0,1[$ d'acheter des croissants. Sur une journée donnée, on notera X le nombre de clients ayant acheté des croissants et Y le nombre de ceux n'en ayant pas acheté.

1. Pour $n \in \mathbb{N}$, donner la loi conditionnelle de X sachant $(\mathrm{N} = n)$.
2. En déduire la loi de X, donner son espérance et sa variance.
3. Calculer la covariance de X et Y.
4. Étudier si les variables X et Y sont indépendantes.

Exercice 6 ●●○ *Conditionnement Binomial*

Un joueur dispose de $n \geqslant 2$ dés équilibrés. Il lance une première fois tous les dés et met de côté les dés ayant donné un 6. On note X_1 le nombre de 6 obtenus.

1. Déterminer la loi de X_1 et donner, si elles existent, son espérance et sa variance.
2. Après ce premier lancer, le joueur relance les dés qui n'avaient pas donné un 6 et met de côté ceux ayant donné un 6. On note X_2 le nombre de 6 obtenus durant ce deuxième lancer.
   - **a.** Pour $k \in [\![0,n]\!]$, donner la loi de conditionnelle de X_2 sachant $(\mathrm{X}_1 = k)$.
   - **b.** En déduire la loi conjointe de $(\mathrm{X}_1, \mathrm{X}_2)$ puis la loi de X_2.
   - **c.** Montrer que $\mathrm{X}_1 + \mathrm{X}_2$ suit une loi binomiale dont on déterminera les paramètres.
     Donner la probabilité que le joueur ait réussi à obtenir des 6 avec chacun des dés durant ces deux lancers.
3. Le joueur itère le procédé jusqu'à ce que tous les dés aient donné un 6. On note T la variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}^* \cup \{+\infty\}$ donnant le nombre de lancers nécessaires.
   - **a.** Pour $n \in \mathbb{N}^*$, donner $\mathrm{P}(\mathrm{T} \leqslant n)$.
   - **b.** Justifier que $\mathrm{P}(\mathrm{T} = +\infty) = 0$.
   - **c.** Vérifier que T admet une espérance et exprimer cette dernière à l'aide d'une somme finie.

Exercice 7 ●●○ *Le problème du collectionneur*

Un enfant collectionne des images qu'il trouve dans des tablettes de chocolat. La collection complète est constituée de N images numérotées de 1 à N. Pour $n \geqslant 1$, on note X_n le numéro de l'image obtenue dans la n−ème tablette de chocolat achetée. La suite $(\mathrm{X}_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes de loi uniforme sur $[\![1,\mathrm{N}]\!]$. Pour $k \in [\![1,\mathrm{N}]\!]$, on notera T_k le nombre de tablettes que l'enfant devra acheter pour avoir k images différentes. On s'intéresse dans la suite à T_N, le nombre de tablettes que l'enfant doit acheter pour avoir la collection complète d'images.

1. Calculer $\mathrm{P}(\mathrm{T}_2 - \mathrm{T}_1 = p)$ pour $p \geqslant 1$.
2. Soit $k \in [\![1,\mathrm{N}-1]\!]$. Calculer $\mathrm{P}(\mathrm{T}_{k+1} - \mathrm{T}_k = p)$ pour $p \geqslant 1$.
3. En déduire $\mathrm{E}(\mathrm{T}_{k+1} - \mathrm{T}_k)$ pour $k \in [\![1,\mathrm{N}-1]\!]$.
4. Calculer alors $\mathrm{E}(\mathrm{T}_\mathrm{N})$ et en donner un équivalent lorsque N tend vers $+\infty$.

Exercice 8 ●●○ *Temps d'attente sur des lancers de pièce*

On considère deux pièces dont la première tombe sur Pile avec probabilité $p \in]0,1[$ et la seconde avec probabilité $q = 1-p$. On lance la première pièce jusqu'à l'obtention d'un Pile et l'on compte X le nombre de lancers nécessaires pour obtenir ce premier Pile. On compte ensuite Y le nombre de Pile obtenus après avoir lancé la seconde pièce X fois.

1. Établir par récurrence sur $j \in \mathbb{N}$, le résultat suivant :

$$\forall x \in]-1,1[, \quad \sum_{k=j}^{+\infty} \binom{k}{j} x^{k-j} = \frac{1}{(1-x)^{j+1}}$$

2. Donner la loi de X.
3. Calculer $P(Y = 0)$ puis $P(Y = j)$ pour $j \in \mathbb{N}^*$.
4. Calculer, si elle existe, l'espérance de Y.
5. Montrer que la loi de Y est la loi d'un produit de deux variables aléatoires indépendantes suivant respectivement une loi géométrique et une loi de Bernoulli de même paramètre p' que l'on déterminera.
Retrouver ainsi $E(Y)$ et calculer $V(Y)$.

Exercice 9 ••• *Nombre de succès sur un nombre aléatoire d'expériences*

On se donne une suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires indépendantes suivant une même loi de Bernoulli de paramètre $p \in \,]0,1[$. On introduit N une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ indépendante des variables $(U_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et :

$$X = \sum_{i=1}^{N} U_i \qquad \text{et} \qquad Y = N - \sum_{i=1}^{N} U_i$$

1. Pour $(k, \ell) \in \mathbb{N}^2$, vérifier que :

$$P(X = k, Y = \ell) = \binom{k+\ell}{k} p^k (1-p)^\ell P(N = k+\ell)$$

On suppose maintenant que les variables X et Y sont indépendantes et que N n'est pas presque sûrement nulle. On définit également :

$$\forall (k,\ell) \in \mathbb{N}^2, \quad p_k = P(X = k) \qquad \text{et} \qquad q_\ell = P(Y = \ell)$$

2. Justifier que les $(p_k)_{k\in\mathbb{N}}$ et $(q_\ell)_{\ell\in\mathbb{N}}$ sont tous strictement positifs.
3. Vérifier que :

$$\forall (k,\ell) \in \mathbb{N}^2, \quad (k+1)p_{k+1}q_\ell(1-p) = (\ell+1)p_k q_{\ell+1} p$$

4. En déduire une relation de récurrence sur les termes de la suite $(p_k)_{k\in\mathbb{N}}$ puis identifier la loi de X.
5. Établir que N suit une loi de Poisson.