Lycée Descartes
Tours

CALCUL DIFFÉRENTIEL

PSI
2024 – 2025

T.D. N°14

Exercice 1 ●○○ — *Études de fonction de plusieurs variables*

On introduit les deux fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2,\quad f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{sinon}\end{cases}\qquad \text{et}\qquad g(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy^3}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{sinon}\end{cases}$$

1. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^2$ et qu'elle admet des dérivées partielles en tout point.
   Étudier si f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.
2. Montrer que g est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.
   Prouver l'existence et donner la valeur de $\partial^2_{x,y}g(0,0)$ et $\partial^2_{y,x}g(0,0)$ et étudier si g est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 2 ●○○ — *Composition de fonctions*

Soient $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^2$ et $g:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ la fonction définie par :

$$\forall (u,v)\in\mathbb{R}^2,\quad g(u,v)=f(uv,u^2+v^2)$$

1. Montrer que les dérivées partielles premières de g existent et les exprimer en fonction de celles de f.
2. De même, prouver que les dérivées partielles secondes de g existent et les exprimer en fonction des dérivées partielles de f.

Exercice 3 ●●○ — *Recherche d'extrema*

Dans chaque cas, déterminer les extrema éventuels de la fonction f définie sur V :

1. Avec $\mathrm{V}=\mathbb{R}^2$ et $f(x,y)=x^2+xy+y^2+2x-2y$ pour tout $(x,y)\in\mathrm{V}$.
2. Avec $\mathrm{V}=\mathbb{R}^2$ et $f(x,y)=x^2+4xy+y^2-2x-4y$ pour tout $(x,y)\in\mathrm{V}$.
3. Avec $\mathrm{V}=\mathbb{R}^2$ et $f(x,y)=x^3+y^3-3xy-1$ pour tout $(x,y)\in\mathrm{V}$.
4. Avec $\mathrm{V}=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2,\ x\geqslant 0 \text{ et } y\geqslant 0 \text{ et } x+y\leqslant 1\right\}$ et $f(x,y)=xy(1-x-y)$ pour tout $(x,y)\in\mathrm{V}$.

Exercice 4 ●●○ — *Une première équation aux dérivées partielles*

Déterminer les fonctions f de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ vérifiant :

$$\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2,\quad \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)+xyf(x,y)=0$$

Exercice 5 ●●○ — *Équations aux dérivées partielles avec changements de variables*

1. On souhaite déterminer les fonctions f de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ vérifiant :

$$\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2,\quad \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)+\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=f(x,y)$$

On pourra réaliser le changement de variable affine :

$$\begin{cases} u &= x+y \\ v &= x-y \end{cases}$$

2. On fixe $c>0$. Dans cette question, on souhaite résoudre l'*équation des ondes*, c'est-à-dire déterminer les fonctions f de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$ vérifiant :

$$\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2,\quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(t,x) = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}(t,x)$$

On pourra réaliser le changement de variable affine :

$$\begin{cases} u &= x+ct \\ v &= x-ct \end{cases}$$

3. On souhaite déterminer les fonctions f de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\Omega = \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ vérifiant :

$$\forall (x,y)\in\Omega,\quad x^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) + 2xy\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y) + y^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = xy$$

On pourra réaliser un changement de variable polaire :

$$\begin{cases} x &= r\cos\theta \\ y &= r\sin\theta \end{cases}$$

Exercice 6 ●●○ — *Plans tangents d'une surface*

1. On considère la surface $\mathscr{S}$ d'équation cartésienne $z = x^2+y^2$.
Étudier la position relative de $\mathscr{S}$ et de son plan tangent en tout point de $\mathscr{S}$.

2. On considère la surface $\mathscr{S}'$ d'équation cartésienne $z = x^2-y^2$.
De même, étudier la position relative de $\mathscr{S}'$ et de son plan tangent en tout point de $\mathscr{S}'$.

3. Déterminer les points de la surface $\mathscr{S}''$ d'équation cartésienne $x^2-y^2+z^2=1$ dont le plan tangent est parallèle au plan Π d'équation $2x+y-z=0$.

Exercice 7 ●●● — *Hyperboloïde à une nappe*

On considère la surface $\mathscr{S}$ d'équation cartésienne $x^2+y^2-z^2=1$ appelée *hyperboloïde à une nappe*. Montrer que l'intersection de $\mathscr{S}$ et de son plan tangent en un point régulier est la réunion de deux droites sécantes en ce point.

Exercice 8 ●●● — *Quotients de Rayleigh*

On munit $\mathbb{R}^n$ de sa structure euclidienne canonique et l'on identifie $\mathbb{R}^n$ et $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. On se donne $\mathrm{A}\in\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique et on définit l'application $f_\mathrm{A} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ en posant :

$$\forall x\in\mathbb{R}^n,\quad f_\mathrm{A}(x) = x^\mathrm{T}\mathrm{A}x$$

1. Prouver que f_A admet des dérivées partielles en tout point de $\mathbb{R}^n$ et les exprimer.
En déduire $\nabla f_\mathrm{A}(x)$ en fonction de $\mathrm{A}x$ pour tout $x\in\mathbb{R}^n$.

2. Pour $x\in\mathbb{R}^n$ non nul, on pose :

$$\mathrm{R}(x) = \frac{x^\mathrm{T}\mathrm{A}x}{x^\mathrm{T}x}$$

Prouver que x est un vecteur propre de A si et seulement si $\nabla\mathrm{R}(x)=0$.