Exercice 1

14. On réalise un D.L. du terme général :

$$\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^{n+1}} = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\,\frac{1}{1+\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}}$$

$$= \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\left(1-\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}+O\left(\frac{1}{n}\right)\right)$$

$$= \underbrace{\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}}_{a_n} + \underbrace{\frac{1}{n}}_{b_n} + \underbrace{O\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)}_{c_n}$$

On a :
- $\sum_{n\geq 1} a_n$ converge par critère spécial de séries alternées ;
- $\sum_{n\geq 1} b_n$ diverge en tant que série de Riemann avec $\alpha = 1 \leq 1$;
- $\sum_{n\geq 1} c_n$ converge par comparaison à une série de Riemann convergente $(\alpha = 3/2 > 1)$.

En conclusion, la série étudiée diverge.

15. On réalise un D.L. du terme général :

$$\cos\left(n^2\pi \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right) = \cos\left(n^2\pi\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}+\frac{1}{3n^3}+O\left(\frac{1}{n^4}\right)\right)\right)$$

$$= \cos\left(n\pi - \frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{3n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)$$

$\cos(n\pi + x) = (-1)^n \cos x$

$$= (-1)^n \cos\left(-\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{3n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)$$

$\cos\left(-\frac{\pi}{2}+x\right) = \sin x$

$$= (-1)^n \sin\left(\frac{\pi}{3n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)$$

$$= (-1)^n\left(\frac{\pi}{3n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)$$

$$= \underbrace{\frac{\pi(-1)^n}{3n}}_{a_n} + \underbrace{O\left(\frac{1}{n^2}\right)}_{b_n}$$

La série $\sum_{n\geq 1} \frac{\pi(-1)^n}{3n}$ converge par critère spécial des séries alternées et la série $\sum_{n\geq 1} O\left(\frac{1}{n^2}\right)$ converge par comparaison à une série de Riemann convergente ($\alpha = 2 > 1$). Ainsi la série étudiée converge.

16. • Si $\alpha \leq 0$, on peut facilement prouver que $\left|\frac{(-1)^n}{\sqrt{n^\alpha + (-1)^{n+1}}}\right| \underset{n\to\infty}{\not\longrightarrow} 0$ de sorte que la série diverge grossièrement.

• On suppose maintenant $\alpha > 0$.

On réalise un D.L. du terme général jusqu'à obtenir un terme général de signe constant :

$$\frac{(-1)^n}{\sqrt{n^\alpha + (-1)^{n+1}}} = \frac{(-1)^n}{n^{\alpha/2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{(-1)^{n+1}}{n^\alpha}}}$$

$$= \frac{(-1)^n}{n^{\alpha/2}}\left(1 - \frac{(-1)^{n+1}}{2n^\alpha} + o\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)\right)$$

$$= \underbrace{\frac{(-1)^n}{n^{\alpha/2}}}_{a_n} + \underbrace{\frac{1}{2n^{3\alpha/2}} + o\left(\frac{1}{n^{3\alpha/2}}\right)}_{b_n}$$

On a : • $\sum_{n\geq 1} a_n$ converge par critère spécial des séries alternées ;

• $\sum_{n\geq 1} b_n$ converge $\iff \frac{3\alpha}{2} > 1 \iff \alpha > \frac{2}{3}$

en utilisant $b_n \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{1}{2n^{3\alpha/2}}$ et le thm. de comparaison.

• En conclusion, la série étudiée converge ssi $\alpha > \frac{2}{3}$.

17. Notons u_n le terme général étudié. On réalise un D.L. :

$\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3} - \frac{3}{3}\right)$ $\quad -\frac{2}{9}$

▷ $$(n^3 + an)^{1/3} = n\left(1 + \frac{a}{n^2}\right)^{1/3}$$

$$= n\left(1 + \frac{a}{3n^2} + O\left(\frac{1}{n^4}\right)\right)$$

$$= n + \frac{a}{3n} + O\left(\frac{1}{n^3}\right)$$

▷ $$(n^2 + 3)^{1/2} = n\left(1 + \frac{3}{n^2}\right)^{1/2}$$

$$= n\left(1 + \frac{3}{2n^2} + O\left(\frac{1}{n^4}\right)\right)$$

$$= n + \frac{3}{2n} + O\left(\frac{1}{n^3}\right)$$

Par différence, on obtient :

$$u_n = \left(\frac{a}{3} - \frac{3}{2}\right) \cdot \frac{1}{n} + O\left(\frac{1}{n^3}\right)$$

▷ Si $\left(\frac{a}{3} - \frac{3}{2}\right) \neq 0$, c'est-à-dire si $a \neq \frac{9}{2}$, on a $u_n \underset{n\infty}{\sim} \left(\frac{a}{3} - \frac{3}{2}\right) \cdot \frac{1}{n}$ et la série $\sum_{n\geq 1} u_n$ diverge par comparaison à une série de Riemann divergente $(\alpha = 1 \leq 1)$.

▷ Si $a = \frac{9}{2}$, $u_n = O\left(\frac{1}{n^3}\right)$ et la série $\sum_{n\geq 1} u_n$ converge par comparaison à une série de Riemann convergente $(\alpha = 3 > 1)$.

En conclusion, la série converge ssi $a = 9/2$.

18. On réalise un D.L. du terme général que l'on note u_n :

$$\begin{aligned} u_n = \left(n \operatorname{sh}\left(\frac{1}{n}\right)\right)^{-n^a} &= \exp\left(-n^a \ln\left(n \operatorname{sh}\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right) \\ &= \exp\left(-n^a \ln\left(n\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{6n^3} + O\left(\frac{1}{n^4}\right)\right)\right)\right) \\ &= \exp\left(-n^a \ln\left(1 + \frac{1}{6n^2} + O\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)\right) \\ &= \exp\left(-n^a\left(\frac{1}{6n^2} + O\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)\right) \\ &= \exp\left(-\frac{1}{6n^{2-a}} + O\left(\frac{1}{n^{3-a}}\right)\right) \end{aligned}$$

On remarque que : $u_n \xrightarrow[n\infty]{} \begin{cases} 1 & \text{si } a < 2 \\ e^{-1/6} & \text{si } a = 2 \end{cases}$

Ainsi la série diverge grossièrement pour $a \leq 2$.

Supposons maintenant $a > 2$.

On a :

$$u_n = \exp\left(-\frac{1}{6} \cdot n^{a-2} + O\left(n^{3-a}\right)\right)$$

de sorte que, par croissance comparée : $n^2 u_n \xrightarrow[n\infty]{} 0$.

Ainsi, par critère de Riemann, on obtient la convergence lorsque $a > 2$.

Finalement, la série converge ssi $a>2$.

Exercice 3

1.A. Soit $n\in\mathbb{N}^*$. On a, en séparant les termes pairs et impairs de la somme :

$$\sum_{k=1}^{2n}\frac{(-1)^{k-1}}{k}=\sum_{p=1}^{n}\frac{(-1)^{2p-1}}{2p}+\sum_{p=0}^{n-1}\frac{(-1)^{2p+1-1}}{2p+1}$$

$$=\underbrace{-\sum_{p=1}^{n}\frac{1}{2p}}_{A}+\underbrace{\sum_{p=0}^{n-1}\frac{1}{2p+1}}_{B}+\underbrace{\sum_{p=1}^{n}\frac{1}{2p}}_{C}\underbrace{-\sum_{p=1}^{n}\frac{1}{2p}}_{D}$$

$$=\underbrace{\sum_{k=1}^{2n}\frac{1}{k}}_{B+C}\underbrace{-\sum_{p=1}^{n}\frac{1}{p}}_{A+D}=\sum_{k=n+1}^{2n}\frac{1}{k}$$

1.B. On a : $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{2n}\frac{1}{k}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k}=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1+\frac{k}{n}}\xrightarrow[n\infty]{}\int_0^1\frac{dt}{1+t}=\ln 2$

par résultat sur les sommes de Riemann sur la fonction $t\mapsto\frac{1}{1+t}$ qui est continue sur $[0,1]$.

1.C. Le critère spécial des séries alternées assure la convergence de la suite $(S_n)_n=\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{k}\right)_n$ vers S.

En particulier, on a $S_{2n}\xrightarrow[n\infty]{}S$. Mais avec <u>1.A.</u> et <u>1.B.</u> on a $S_{2n}\xrightarrow[n\infty]{}\ln 2$. Par unicité de la limite : $S=\ln 2$.

2.A. L'existence de T découle du théorème spécial des séries alternées puisque $\left(\left|(-1)^n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right|\right)_{n\geq1}=\left(\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)_{n\geq1}$ est décroissante de limite nulle.

2.B. Soit $n\in\mathbb{N}^*$. On sépare termes pairs et impairs de la somme que l'on note S_{2n} :

$$S_{2n}=\sum_{k=1}^{2n}(-1)^k\ln\left(1+\frac{1}{k}\right)=\sum_{p=1}^{n}\ln\left(1+\frac{1}{2p}\right)-\sum_{p=0}^{n-1}\ln\left(1+\frac{1}{2p+1}\right)$$

$$= \sum_{p=1}^{n} \ln\left(\frac{2p+1}{2p}\right) - \sum_{p=0}^{n-1} \ln\left(\frac{2p+2}{2p+1}\right)$$

$$= \ln\left(\frac{2n+1}{2n}\right) - \ln 2 + \ln\left(\prod_{p=1}^{n-1} \frac{2p+1}{2p} \cdot \frac{2p+1}{2p+2}\right)$$

$$= \ln\left(\frac{2n+1}{2n}\right) - \ln 2 + \ln\left(\frac{3^2 \cdot 5^2 \cdot \dots \cdot (2n-1)^2}{(2\cdot 4)(4\cdot 6)\cdot \dots \cdot (2n-2)(2n)}\right)$$

$$= \ln\left(\frac{2n+1}{2n}\right) - \ln 2 + \ln\left(\frac{3^2 \cdot 5^2 \cdot \dots \cdot (2n-1)^2}{2\cdot 4^2 \cdot 6^2 \cdots (2n-2)^2 (2n)}\right)$$

$$= \ln(2n+1) + \ln\left(\frac{3^2 \cdot 5^2 \cdot \dots \cdot (2n-1)^2}{2^2 \cdot 4^2 \cdot \dots \cdot (2n)^2}\right)$$

on "ajoute" les pairs au carré en haut et en bas

$$= \ln(2n+1) + \ln\left(\frac{\left((2n)!\right)^2}{(2^n n!)^4}\right)$$

$$= \ln\left(\frac{(2n)!\,(2n+1)!}{2^{4n}(n!)^4}\right).$$

2.c. Grâce à la formule de Stirling, on a :

$$\frac{(2n)!\,(2n+1)!}{2^{4n}(n!)^4} \underset{n\infty}{\sim} \frac{\sqrt{2\pi(2n)}\,(2n)^{2n} e^{-2n} \cdot \sqrt{2\pi(2n+1)}\,(2n+1)^{2n+1} e^{-(2n+1)}}{2^{4n}\left(\sqrt{2\pi n}\, n^n e^{-n}\right)^4}$$

$$= \frac{\sqrt{2}\sqrt{n}\sqrt{2n+1}\,(2n+1)^{2n+1} e^{-1}}{2\pi\, n^2\,(2n)^{2n}}$$

$\sqrt{2n+1} \underset{n\infty}{\sim} \sqrt{2n}$ et $2n+1 \underset{n\infty}{\sim} 2n$

$$\underset{n\infty}{\sim} \frac{\sqrt{2}\sqrt{n}\,\sqrt{2n}\,(2n)(2n+1)^{2n} e^{-1}}{2\pi\, n^2\,(2n)^{2n}}$$

$$= \frac{2e^{-1}}{\pi}\left(\frac{2n+1}{2n}\right)^{2n}$$

$$= \frac{2e^{-1}}{\pi}\left(1+\frac{1}{2n}\right)^{2n}$$

Or : $\left(1+\frac{1}{2n}\right)^{2n} = \exp\left(2n \ln\left(1+\frac{1}{2n}\right)\right)$

$$= \exp\left(2n\left(\frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right)$$

$$= \exp(1+o(1)) \xrightarrow[n\infty]{} e$$

Finalement, on obtient par composition de limites : $S_{2n} \xrightarrow[n\infty]{} \ln\left(\frac{2}{\pi}\right)$.

On conclut comme à la question 1.c. que $T = \ln\left(\frac{2}{\pi}\right)$.

Exercice 5

3.A

- On prouve que : $\forall n \geqslant 0,\ u_n > 1$ par récurrence.

<u>Initialisation</u> : si $n=0$, $u_0 > 1$.

<u>Hérédité</u> : soit $n \geqslant 0$ tel que $u_n > 1$.

L'étude des variations de la fonction $f : x \longmapsto x^2 - x + 1$ sur $[1,+\infty[$ donne :

Ainsi, si $x > 1$, $f(x) > 1$. On en déduit $u_{n+1} = f(u_n) > 1$.

D'où le résultat.

- Si $n \geqslant 0$, $u_{n+1} - u_n = u_n^2 - 2u_n + 1 = (u_n - 1)^2 \geqslant 0$

La suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est donc croissante. Par le thm. de la limite monotone, on a $\lim\limits_{n\infty} u_n \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$.

Si jamais $\lim\limits_{n\infty} u_n = \ell \in \mathbb{R}$, on aurait en passant à la limite dans la relation de récurrence : $\ell = \ell^2 - \ell + 1$ soit $\ell = 1$. Or $u_0 > 1$ et $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est croissante donc la suite ne peut tendre vers 1. On en déduit $\lim\limits_{n\infty} u_n = +\infty$.

3.B.

Soit $n \geqslant 0$.
$$\frac{1}{u_{n+1}-1} - \frac{1}{u_n - 1} = \frac{1}{u_n^2 - u_n} - \frac{1}{u_n - 1}$$

>0 par 3.A.

$$= \frac{1}{u_n - 1}\left[\frac{1}{u_n} - 1\right]$$

$$= \frac{1}{u_n - 1} \cdot \frac{1-u_n}{u_n} = -\frac{1}{u_n}$$

Ainsi, si $N \geqslant 0$, on a :

télescopage

$$\sum_{k=0}^{N} \frac{1}{u_k} = \sum_{k=0}^{N}\left(\frac{1}{u_k - 1} - \frac{1}{u_{k+1}-1}\right) = \frac{1}{u_0 - 1} - \frac{1}{u_{N+1}-1} \xrightarrow[N\infty]{} \frac{1}{u_0 - 1}$$

car $u_{N+1} \longrightarrow \infty$ par 3.A.

On en déduit que $\sum\limits_{n\geqslant 0} \frac{1}{u_n}$ CVG et que sa somme vaut $\frac{1}{u_0 - 1}$.

Exercice 8

1. Soit $n \geqslant 1$.
$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \sin(kx) = \mathrm{Im}\left(\sum_{k=1}^{n} e^{ikx}\right)$$
$$= \mathrm{Im}\left(\sum_{k=1}^{n} (e^{ix})^k\right)$$
$$= \mathrm{Im}\left(\frac{1-e^{inx}}{1-e^{ix}}\right)$$

On suppose $x \not\equiv 0\ [2\pi]$ sinon $e^{ix} = 1$

$$= \mathrm{Im}\left(\frac{e^{\frac{inx}{2}}\left(e^{\frac{-inx}{2}} - e^{\frac{inx}{2}}\right)}{e^{ix/2}\left(e^{-ix/2} - e^{ix/2}\right)}\right)$$
$$= \mathrm{Im}\left(e^{\frac{ix}{2}(n+1)} \frac{\sin\left(n\frac{x}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}\right)$$
$$= \sin\left((n+1)\frac{x}{2}\right) \frac{\sin\left(n\frac{x}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}$$

On en déduit que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ |S_n| \leqslant \dfrac{1}{\left|\sin\left(\frac{x}{2}\right)\right|}$ (car $|\sin u| \leqslant 1$ si $u \in \mathbb{R}$)

ce qui donne bien que $(S_n)_n$ est bornée.

2. Soit $n \geqslant 2$. Pour $k \geqslant 1$, on remarque que : $\sin(kx) = S_k - S_{k-1}$.

Ainsi :
$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\sin(kx)}{k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{(S_k - S_{k-1})}{k}$$

séparation des sommes et chgt d'indice

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{S_k}{k} - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{S_k}{k+1}$$
$$= \frac{S_n}{n} - \underbrace{S_0}_{=0} + \sum_{k=1}^{n-1} S_k \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right)$$
$$= \underbrace{\frac{S_n}{n}}_{a_n} + \underbrace{\sum_{k=1}^{n-1} \frac{S_k}{k(k+1)}}_{b_n}$$

3. La série étudiée convergera ssi la suite de ses sommes partielles $\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{\sin(kx)}{k}\right)_{n \geqslant 1}$ converge, ce qui sera le cas, d'après la question précédente, si les suites $(a_n)_{n\geqslant 1}$ et $(b_n)_{n \geqslant 1}$ convergent.

- **Étude de $(a_n)_{n\geq 1}$** Puisque $(S_n)_{n\geq 1}$ est bornée, disons par M, d'après 1., on a : $\forall n\geq 1, |a_n| \leq \frac{M}{n} \xrightarrow[n\infty]{} 0$.

Ainsi, par encadrement, $a_n \xrightarrow[n\infty]{} 0$ et $(a_n)_{n\geq 1}$ converge.

- **Étude de $(b_n)_{n\geq 1}$** La suite $(b_n)_{n\geq 1}$ sera convergente ssi la série $\sum_{n\geq 1} \frac{S_n}{n(n+1)}$ converge.

Or : $\forall n\geq 1$, $n^2 S_n = \underbrace{\frac{n}{n+1}}_{\text{borné car convergent (vers 1)}} \overbrace{S_n}^{\text{borné par } M}$ donc $(n^2 S_n)_{n\geq 1}$ est bornée.

Ainsi $S_n = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$ et, par thm. de comparaison, $\sum_{n\geq 1} \frac{S_n}{n(n+1)}$ converge.

Ainsi $(a_n)_{n\geq 1}$ et $(b_n)_{n\geq 1}$ converge donc la série $\sum_{n\geq 1} \frac{\sin(nx)}{n}$ converge.

Remarque : On a mis de côté dès le début le cas $x \equiv 0\ [2\pi]$.

Dans ce cas, on a clairement : $\forall n\in\mathbb{N}$, $S_n = 0$

ce qui donne $S_n \xrightarrow[n\infty]{} 0$ et la convergence de la série.

Exercice 9

1. Pour $n \in \mathbb{N}$, justifier l'existence de :

$$R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k}$$

La série $\sum_{n\geqslant 1} (-1)^n/n$ est une série alternée dont la valeur absolue du terme général décroît et tend vers 0. Par le théorème spécial, elle converge. Ainsi les restes $(R_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de cette série convergente sont bien définis.

2. Si $n \in \mathbb{N}^*$, démontrer que :

$$R_n + R_{n-1} = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k(k-1)}$$

On fixe $n \in \mathbb{N}^*$. On a, avec un changement d'indice $k = \ell - 1$ dans la seconde somme :

$$\begin{aligned}
R_n + R_{n-1} &= \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k} + \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k} \\
&= \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k} + \sum_{\ell=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^{\ell-1}}{\ell-1} \\
&= \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k} - \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k-1} \\
&= \sum_{k=n+1}^{+\infty} (-1)^k \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k-1}\right) \\
&= -\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k(k-1)} \\
&= \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k(k-1)}
\end{aligned}$$

3. Déterminer un équivalent de R_n lorsque n tend vers $+\infty$.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on a aussi :

$$\mathrm{R}_{n-1} - \mathrm{R}_n = \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k} - \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k} = \frac{(-1)^n}{n}$$

En faisant la différence de la relation trouvée à la question précédente avec celle ci-dessus, il vient :

$$2\mathrm{R}_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n} + \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k(k-1)}$$

La série $\sum_{n\geqslant 2} (-1)^{n-1}/[n(n-1)]$ est une série alternée dont la valeur absolue du terme général décroît et tend vers 0. Par le théorème spécial, elle converge et on peut majorer son reste de la façon suivante :

$$\left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k(k-1)} \right| \leqslant \left| \frac{(-1)^n}{(n+1)n} \right| = \frac{1}{n(n+1)}$$

On en déduit que :

$$\mathrm{R}_n = \frac{(-1)^{n+1}}{2n} + \frac{1}{2} \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k(k-1)} = \frac{(-1)^{n+1}}{2n} + \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^2}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{(-1)^{n+1}}{2n}$$

4. Donner la nature de la série de terme général R_n.

On reprend l'expression :

$$\mathrm{R}_n = \frac{(-1)^{n+1}}{2n} + \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

La série $\sum_{n\geqslant 1} (-1)^{n+1}/(2n)$ converge en vertu du théorème spécial des séries alternées et la série $\sum_{n\geqslant 1} \mathrm{O}(1/n^2)$ converge absolument par comparaison avec une série de Riemann convergente. Ainsi, par somme, la série $\sum_{n\geqslant 1} \mathrm{R}_n$ est converge.