Exercice 1

13. Si $x=0$, la série converge. Si $x\neq 0$, on utilise le critère de d'Alembert pour $u_n = \left|\frac{(n!)^2 x^n}{(2n)!}\right|$.

On a : $\frac{u_{n+1}}{u_n} = |x| \frac{(n+1)^2}{(2n+1)(2n+2)} \xrightarrow[n\infty]{} \frac{|x|}{4}$

- Si $|x| < 4$, on en déduit que la série converge absolument et donc converge.
- Si $|x| \geq 4$, on a, par la formule de Stirling :

$$u_n \underset{n\infty}{\sim} |x|^n \cdot \frac{2\pi n\, n^{2n} e^{-2n}}{\sqrt{4\pi n}\,(2n)^{2n} e^{-2n}} = \sqrt{n\pi}\underbrace{\left(\frac{|x|}{4}\right)^n}_{\frac{|x|}{4}\geq 1} \xrightarrow[n\infty]{} +\infty$$

Ainsi $\frac{(n!)^2 x^n}{(2n)!} \underset{n\infty}{\not\to} 0$ et la série diverge grossièrement.

14. On a par développement limité :

$$\left(n^2+n+n^{1/3}\right)^{1/2} = n\left(1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^{5/3}}\right)^{1/2}$$

$$= n\left[1+\frac{1}{2n}+\frac{1}{2n^{5/3}} - \frac{1}{8}\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n^{5/3}}\right)^2 + \frac{1}{16}\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n^{5/3}}\right)^3 + \underbrace{o\left(\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n^{5/3}}\right)^3\right)}_{=o\left(\frac{1}{n^3}\right)}\right]$$

on retire tous les termes plus précis que $\frac{1}{n^3}$

$$= n\left[1+\frac{1}{2n}+\frac{1}{2n^{5/3}} - \frac{1}{8n^2} - \frac{1}{4n^{8/3}} + \frac{1}{16n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)\right]$$

$$= n + \frac{1}{2} + \frac{1}{2n^{2/3}} - \frac{1}{8n} - \frac{1}{4n^{5/3}} + \frac{1}{16n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

Ainsi : $\cos\left(\pi\left(n^2+n+n^{1/3}\right)^{1/2}\right) = \cos\left(n\pi + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2n^{3/2}} - \frac{\pi}{8n} - \frac{\pi}{4n^{5/3}} + \frac{\pi}{16n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)$

$$= (-1)^n \sin\left(\frac{\pi}{2n^{3/2}} - \frac{\pi}{8n} - \frac{\pi}{4n^{5/3}} + \frac{\pi}{16n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)$$

DL_2 du sinus

$$= (-1)^n\left(\frac{\pi}{2n^{3/2}} - \frac{\pi}{8n} - \frac{\pi}{4n^{5/3}} + \frac{\pi}{16n^2} + o\left(\left(\frac{\pi}{2n^{3/2}} - \frac{\pi}{8n} - \frac{\pi}{4n^{5/3}} + \frac{\pi}{16n^2}\right)^2\right)\right)$$

$$= \underbrace{\frac{(-1)^n\pi}{2n^{3/2}} - \frac{\pi(-1)^n}{8n} - \frac{\pi(-1)^n}{4n^{5/3}} + \frac{\pi(-1)^n}{16n^2}}_{\text{Termes généraux de série convergente par le critère spécial des séries alternées}} + \underbrace{o\left(\frac{1}{n^2}\right)}_{\text{terme général de série convergente par comparaison à une série de Riemann.}}$$

Ainsi, la série étudiée converge.

15. On suppose $\alpha > \beta$. On a, par développement limité :

$$\frac{(-1)^n}{n^\alpha + (-1)^n n^\beta} = \frac{(-1)^n}{n^\alpha} \frac{1}{1 + \frac{(-1)^n}{n^{\alpha-\beta}}}$$

$$= \frac{(-1)^n}{n^\alpha}\left[1 - \frac{(-1)^n}{n^{\alpha-\beta}} + o\left(\frac{1}{n^{\alpha-\beta}}\right)\right]$$

$$= \underbrace{\frac{(-1)^n}{n^\alpha}}_{=a_n} \underbrace{- \frac{1}{n^{2\alpha-\beta}} + o\left(\frac{1}{n^{2\alpha-\beta}}\right)}_{=b_n}.$$

On commence par écrire que : $\dfrac{(-1)^n}{n^\alpha + (-1)^n n^\beta} \underset{n\infty}{\sim} \dfrac{(-1)^n}{n^\alpha}$

ce qui donne la divergence grossière de la série pour $\alpha \leqslant 0$.

Dans ce qui suit, on suppose maintenant $\alpha > 0$.

- $\sum_{n\geqslant 1} a_n$ converge grâce au critère spécial des séries alternées pour $\alpha > 0$.
- On a $b_n \underset{n\infty}{\sim} -\dfrac{1}{n^{2\alpha-\beta}}$ de sorte que, par théorème de comparaison, $\sum_{n\geqslant 1} b_n$ converge ssi $2\alpha - \beta > 1$.

Conclusion (dans le cas $\alpha > \beta$) La série étudiée converge ssi $\alpha > 0$ et $2\alpha - \beta > 1$.

On traite le cas $\alpha < \beta$ en remarquant que :

$$\frac{(-1)^n}{n^\alpha + (-1)^n n^\beta} \underset{n\infty}{\sim} \frac{1}{n^\beta}$$

de sorte que la série converge par thm de comparaison ssi $\beta > 1$ (le terme général est positif à partir d'un certain rang grâce à cet équivalent).

Conclusion générale Si $\alpha > \beta$, la série converge ssi $\alpha > 0$ et $2\alpha - \beta > 1$

Si $\alpha < \beta$, la série converge ssi $\beta > 1$.

16. $$n^2\left(1-\frac{1}{\ln n}\right)^{\sqrt{n}} = n^2 \exp\left(\sqrt{n}\ \ln\left(1-\frac{1}{\ln n}\right)\right)$$
$$= \exp\left(2\ln n + \sqrt{n}\ln\left(1-\frac{1}{\ln n}\right)\right)$$

Or : $$2\ln n + \sqrt{n}\ln\left(1-\frac{1}{\ln n}\right) = \underbrace{\sqrt{n}\ln\left(1-\frac{1}{\ln n}\right)}_{=a_n}\left(1+\underbrace{\frac{2\ln n}{\sqrt{n}\ln\left(1-\frac{1}{\ln n}\right)}}_{=b_n}\right)$$

où : $$a_n \sim -\frac{\sqrt{n}}{\ln n} \xrightarrow[n\infty]{} -\infty \quad \text{(croissance comparée)}$$

et : $$b_n \underset{n\infty}{\sim} \frac{2\ln n}{\frac{-\sqrt{n}}{\ln n}} = \frac{-2(\ln n)^2}{\sqrt{n}} \xrightarrow[n\infty]{} 0 \quad \text{(croissance comparée)}$$

Ainsi : $$2\ln n + \sqrt{n}\ln\left(1-\frac{1}{\ln n}\right) = \overbrace{a_n}^{\xrightarrow[n\infty]{} -\infty}\underbrace{(1+b_n)}_{\xrightarrow[n\infty]{} 1} \xrightarrow[n\infty]{} -\infty.$$

On conclut que $n^2\left(1-\frac{1}{\ln n}\right)^{\sqrt{n}} \xrightarrow[n\infty]{} 0$, ce qui donne la convergence de la série étudiée par critère de Riemann.

17. On a : $$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(n+k)^2-n^2} = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2kn+k^2}$$
$$\geqslant \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2n^2+n^2}$$
$$= n\cdot\frac{1}{3n^2} = \frac{1}{3n}$$

le plus petit terme de la somme est celui d'indice $k=n$.

Le terme général de la série étudiée est donc positif et minoré par un terme général de série divergente (série harmonique) : la série diverge par théorème de comparaison.

18. Le terme général est une suite de réels strictement positifs et :

$$\frac{(n+1)^{n+1}}{2^{(n+1)^2}}\cdot\frac{2^{n^2}}{n^n} = \underbrace{\frac{(n+1)}{2^{2n+1}}}_{\xrightarrow[n\infty]{} 0}\cdot\underbrace{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n}_{\xrightarrow[n\infty]{} e} \xrightarrow[n\infty]{} 0 < 1$$

(croissance comparée) (passer en notation exponentielle)

D'après le critère de d'Alembert, la série converge.

Exercice 12

1. On pose : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $a_n = \dfrac{u_n}{n^\alpha}$ et $v_n = \ln(a_{n+1}) - \ln(a_n)$.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\begin{aligned}
v_n &= \ln\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right) \\
&= \ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\left(\frac{n}{n+1}\right)^\alpha\right) \\
&= \ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-\alpha}\right) \\
&= \ln\left(1+\frac{\alpha}{n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) - \alpha \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \\
&= \frac{\alpha}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) - \frac{\alpha}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \\
&= O\left(\frac{1}{n^2}\right)
\end{aligned}$$

$\ln(xy) = \ln x + \ln y$ et hypothèse de l'énoncé

DL_1

Ainsi la série de terme général v_n est convergente par comparaison à une série de Riemann convergente.

Si la série $\sum_{n\geq 1} v_n = \sum_{n \geq 1} [\ln(a_{n+1}) - \ln(a_n)]$ converge, on en déduit que la suite $(\ln(a_n))_{n\geq 1}$ converge (par téléscopage). On note L sa limite et on obtient que :

$$a_n \xrightarrow[n\infty]{} \underbrace{e^L}_{=C>0}$$

Finalement : $\dfrac{u_n}{n^\alpha} = a_n \underset{n\infty}{\sim} C$ Soit $u_n \underset{n\infty}{\sim} C n^\alpha$

2. Notons que la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ est bien définie car $b\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}^-$.

Pour $n\geq 1$, on a :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{a(a+1)\cdots(a+n)}{b(b+1)\cdots(b+n)} \times \frac{b(b+1)\cdots(b+n-1)}{a(a+1)\cdots(a+n-1)}$$

$$= \frac{a+n}{b+n} = \frac{a+n}{n}\,\frac{1}{1+\frac{b}{n}}$$

DL$_2$

$$= \frac{a+n}{n}\left(1-\frac{b}{n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)$$

$$= 1+\frac{a}{n}-\frac{b}{n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

$$= 1+\frac{a-b}{n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

Avec la question précédente, il existe alors $C>0$ telle que :

$$u_n \underset{n\infty}{\sim} C\,n^{a-b} = \frac{C}{n^{b-a}}$$

Dès lors, par théorème de comparaison et d'après la nature des séries de Riemann, on a $\sum_{n\geq 1} u_n$ convergente ssi $b-a>1$.

Exercice 13

- On suppose que $(u_n)_{n\geq 1}$ converge. Avec le lien suite – série, on en déduit que la série $\sum_{n\geq 1}(u_{n+1}-u_n) = \sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^\alpha u_n}$ converge.

On note ℓ la limite de $(u_n)_{n\geq 1}$. On remarque que $\ell>0$.

En effet, on prouve facilement par récurrence que $u_n\geq 0$ pour $n\geq 1$. Cela donne, pour $n\geq 1$, que $u_{n+1}-u_n = \frac{1}{n^\alpha u_n}\geq 0$ et la croissance de $(u_n)_{n\geq 1}$. Enfin, par croissance, on a $u_n\geq u_1$ pour $n\geq 1$, ce qui donne $\ell\geq u_1>0$ à la limite. On peut donc écrire que $\frac{1}{n^\alpha u_n}\underset{n\infty}{\sim}\frac{1}{\ell n^\alpha}$. Comme le 1er terme est un terme général de série convergente, la série $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{\ell n^\alpha}$ est convergente par comparaison, ce qui donne $\alpha>1$ par connaissance des séries de Riemann.

- Réciproquement, on suppose $\alpha > 1$ et on va montrer que la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ converge. Par le point précédent, on a $u_{n+1} - u_n \geq 0$ et $u_n \geq u_1$ pour $n \geq 1$. Ainsi on peut écrire :

$$\forall n \geq 1, \quad 0 \leq u_{n+1} - u_n = \frac{1}{n^\alpha u_n} \leq \frac{1}{u_1 n^\alpha}$$

Comme la série $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{u_1 n^\alpha}$ est une série de Riemann convergente puisque $\alpha > 1$, le théorème de comparaison donne la convergence de la série $\sum_{n\geq 1} (u_{n+1} - u_n)$ et donc la convergence de la suite $(u_n)_{n\geq 1}$.

- Conclusion : La suite $(u_n)_{n\geq 1}$ converge ssi $\alpha > 1$.

Exercice 14

1. Soit $n \geq 1$. On a :

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \cos(kx) = \mathrm{Re}\left(\sum_{k=1}^{n} (e^{ix})^k\right)$$

$$= \mathrm{Re}\left(\frac{1 - e^{inx}}{1 - e^{ix}}\right) \quad \leftarrow \text{somme géométrique de raison } e^{ix} \neq 1 \text{ car } x \notin 2\pi\mathbb{Z}$$

$$= \mathrm{Re}\left(\frac{e^{\frac{inx}{2}}\left(e^{-\frac{inx}{2}} - e^{\frac{inx}{2}}\right)}{e^{\frac{ix}{2}}\left(e^{-\frac{ix}{2}} - e^{\frac{ix}{2}}\right)}\right)$$

$$= \mathrm{Re}\left(e^{i(n-1)\frac{x}{2}} \times \frac{-2i\sin\left(\frac{nx}{2}\right)}{-2i\sin\left(\frac{x}{2}\right)}\right)$$

$$= \cos\left((n-1)\frac{x}{2}\right) \frac{\sin\left(n\frac{x}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}$$

On en déduit immédiatement que :

$$\forall n \geq 1, \quad |S_n| \leq \frac{1}{\left|\sin\left(\frac{x}{2}\right)\right|}$$

de sorte que la suite $(S_n)_{n\geq 1}$ est bornée.

2. Soit $n \geq 1$. On a :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\cos(kx)}{k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\left(S_k - S_{k-1}\right) \quad \text{car } \cos(kx) = S_k - S_{k-1} \text{ pour } k \geq 1$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{S_k}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{S_{k-1}}{k}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{S_k}{k} - \sum_{p=0}^{n-1} \frac{S_p}{p+1}$$ en posant $p = k-1$ dans la 2e somme

$$= \sum_{k=1}^{n-1} \frac{S_k}{k} + \frac{S_n}{n} - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{S_k}{k+1} - S_0$$

$$= \frac{S_n}{n} + \sum_{k=1}^{n-1} S_k \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right)$$

3. On va établir la convergence de la suite :

$$\forall n \geq 1, \quad u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{\cos(kx)}{k}$$

Grâce à la question précédente, on a :

$$\forall n \geq 1, \quad u_n = \underbrace{\frac{S_n}{n}}_{(1)} + \underbrace{\sum_{k=1}^{n-1} S_k \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right)}_{(2)}$$

(1) Puisque $(S_n)_{n\geq 1}$ est bornée par 1, on a $\frac{S_n}{n} \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$.

(2) Cette quantité sera convergente si la série $\sum_{n\geq 1} S_n \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right)$ converge.
Or, puisque $(S_n)_{n\geq 1}$ est bornée, disons par $M \in \mathbb{R}$, on a :

$$\forall n \geq 1, \quad \left| S_n \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) \right| \leq M \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right)$$

et la série $\sum_{n\geq 1} M \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right)$ est convergente (série télescopique).
Ainsi, par thm de comparaison, la série $\sum_{n\geq 1} S_n \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right)$ converge absolument et donc converge.

Finalement, $(u_n)_{n\geq 1}$ admet une limite finie donc $\sum_{n\geq 1} \frac{\cos(nx)}{n}$ converge.