COMPLÉMENTS D'ALGÈBRE

T.D. N°2

EXERCICE 1 ●○○ — *Utilisation d'un polynôme annulateur*

On introduit la matrice $A \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 2 \\ -1 & 5 & -2 \\ -1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Trouver un polynôme annulateur de A.
2. En déduire que A est inversible et donner l'expression de A^{-1}.
3. Déterminer les puissances de la matrice A.

EXERCICE 2 ●○○ — *Matrices stochastiques*

On dit qu'une matrice $A = (a_{i,j})$ de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ est *stochastique* si elle vérifie :

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, \quad a_{i,j} \geqslant 0 \qquad \text{et} \qquad \forall i \in [\![1,n]\!], \quad \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} = 1$$

On note $E_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices stochastiques de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

1. L'ensemble $E_n(\mathbb{R})$ est-il un espace vectoriel ?
2. Prouver que si A et B sont deux matrices stochastiques alors AB l'est aussi.
3. Si A et B sont deux matrices stochastiques et si λ et μ sont deux réels positifs vérifiant $\lambda + \mu = 1$, démontrer que la matrice $\lambda A + \mu B$ est stochastique.
4. On note $U \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ le vecteur-colonne dont toutes les coordonnées valent 1. Prouver que $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ est stochastique si et seulement si tous ses coefficients sont positifs et $AU = U$.

EXERCICE 3 ●●○ — *Équation matricielle*

Soient A et B deux matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Résoudre l'équation suivante d'inconnue $X \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$:

$$X = \mathrm{Tr}(X)A + B$$

EXERCICE 4 ●●○ — *Propriétés de la trace*

1. On se donne $\varphi : \mathscr{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ une forme linéaire vérifiant :

   $$\forall A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K}), \quad \varphi(AB) = \varphi(BA)$$

   Montrer que φ est proportionnelle à la trace.
   On pourra appliquer la relation précédente avec les matrices élémentaires de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.
2. À l'aide des matrices élémentaires de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, déterminer une base de Ker(Tr).

EXERCICE 5 ●●○ — *Trace d'un endomorphisme*

Soit A une matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. On définit une application φ en posant :

$$\forall M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}), \quad \varphi(M) = AM - MA$$

1. Vérifier que φ définit un endomorphisme de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.
2. Donner la matrice de φ dans la base canonique de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et en déduire $\mathrm{Tr}(\varphi)$.

Exercice 6 ●●○ — *Un pas vers la diagonalisation*

Soient E un $\mathbb{K}$−espace vectoriel de dimension finie n et u un endomorphisme de E vérifiant $u^3-6u^2+11u-6\,\mathrm{id}_E=0$.
On introduit $F_1=\mathrm{Ker}(u-\mathrm{id}_E)$, $F_2=\mathrm{Ker}(u-2\,\mathrm{id}_E)$ et $F_3=\mathrm{Ker}(u-3\,\mathrm{id}_E)$.

1. Pour $x_1\in F_1$ et $k\in\mathbb{N}$, exprimer $u^k(x_1)$ en fonction de x_1 et de k.
2. On se donne $Q\in\mathbb{K}[X]$ et $x=x_1+x_2+x_3$ avec $x_i\in F_i$ pour $i\in\{1,2,3\}$. Prouver que :
$$Q(u)(x)=Q(1)x_1+Q(2)x_2+Q(3)x_3$$
3. En déduire que la somme $F_1+F_2+F_3$ est directe.
4. Prouver que $E=F_1\oplus F_2\oplus F_3$.
On pourra procéder par analyse-synthèse.
5. Exprimer la matrice de u dans une base adaptée à cette décomposition en somme directe.

Exercice 7 ●●○ — *Calculs de déterminants*

1. Calculer, pour $n\in\mathbb{N}^*$, le déterminant de taille $n\times n$ suivant :
$$D_n=\begin{vmatrix}3&1&0&\cdots&0\\2&\ddots&\ddots&\ddots&\vdots\\0&\ddots&\ddots&\ddots&0\\\vdots&\ddots&\ddots&\ddots&1\\0&\cdots&0&2&3\end{vmatrix}$$
2. Calculer, pour $n\in\mathbb{N}^*$, le déterminant suivant :
$$\begin{vmatrix}1&n&n&\cdots&n\\n&2&n&\cdots&n\\n&n&3&\cdots&n\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\n&n&n&\cdots&n\end{vmatrix}$$
3. Soient $x\in\mathbb{C}$. On va calculer, pour $n\in\mathbb{N}^*$, le déterminant de la matrice $C_n\in\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ suivante :
$$C_n=\begin{pmatrix}a&c&\cdots&\cdots&c\\b&a&\ddots&&\vdots\\\vdots&\ddots&\ddots&\ddots&\vdots\\\vdots&&\ddots&a&c\\b&\cdots&\cdots&b&a\end{pmatrix}$$
   - **a.** On note K_n la matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ dont tous les coefficients sont égaux à 1.
   Montrer que l'application :
   $$P_n : x\longmapsto \det(C_n+xK_n)$$
   est un polynôme de degré au plus 1.
   - **b.** En déduire $\det(C_n)$.

Exercice 8 ●●○ — *Sous-espaces stables*

Soient E un $\mathbb{K}$−espace vectoriel de dimension $n\geqslant 2$ et $u\in\mathscr{L}(E)$ un endomorphisme.

1. On suppose dans cette question que, pour tout vecteur $x\in E$, la famille $(x,u(x))$ est liée.
   - **a.** Justifier que pour tout $x\in E$ il existe un scalaire λ_x tel que $u(x)=\lambda_x x$.
   - **b.** En déduire que u est une homothétie de E (c'est-à-dire qu'il existe $\lambda\in\mathbb{K}$ tel que $u=\lambda\,\mathrm{id}_E$).
   On fixera $x_0\in E$ non nul et on prouvera que $\lambda_x=\lambda_{x_0}$ pour tout $x\in E$ non nul en s'intéressant à λ_{x+x_0}.
2. On suppose que toute droite vectorielle de E est stable par u.
Montrer que u est une homothétie de E.
3. On suppose que $n\geqslant 3$ et que tout plan vectoriel de E est stable par u.
   - **a.** Montrer que toute droite vectorielle de E peut s'écrire comme l'intersection de deux plans vectoriels de E.
   - **b.** En déduire que u est une homothétie de E.

Exercice 9 ●●○ *Matrices semblables*

Soit $A \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ une matrice non nulle vérifiant $A^3 + A = 0$.

1. Montrer que $\mathrm{Im}(A) \subset \mathrm{Ker}(A^2 + I_3)$ et en déduire $\mathrm{Ker}(A^2 + I_3) \neq \{0\}$.
2. Prouver par l'absurde que $\mathrm{Ker}(A) \neq \{0\}$.
3. Conclure que la matrice A est semblable à la matrice B suivante :

$$B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Exercice 10 ●●● *Écriture d'un sous-espace vectoriel comme intersection d'hyperplans*

Soient E un $\mathbb{K}-$ espace vectoriel de dimension finie $n \geqslant 2$ et F un sous-espace vectoriel de E de dimension $1 \leqslant p \leqslant n-1$. Montrer que F peut s'écrire comme l'intersection de $n-p$ hyperplans de E.