

T.D. N°2



## EXERCICE 1 ••○ Utilisation d'un polynôme annulateur

On introduit la matrice  $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$  suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 2 \\ -1 & 5 & -2 \\ -1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Trouver un polynôme annulateur de  $A$ .
2. En déduire que  $A$  est inversible et donner l'expression de  $A^{-1}$ .
3. Déterminer les puissances de la matrice  $A$ .

## EXERCICE 2 ••○ Matrices stochastiques

On dit qu'une matrice  $A = (a_{i,j})$  de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  est *stochastique* si elle vérifie :

$$\forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, \quad a_{i,j} \geq 0 \quad \text{et} \quad \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad \sum_{j=1}^n a_{i,j} = 1$$

On note  $E_n(\mathbb{R})$  l'ensemble des matrices stochastiques de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ .

1. L'ensemble  $E_n(\mathbb{R})$  est-il un espace vectoriel ?
2. Prouver que si  $A$  et  $B$  sont deux matrices stochastiques alors  $AB$  l'est aussi.
3. Si  $A$  et  $B$  sont deux matrices stochastiques et si  $\lambda$  et  $\mu$  sont deux réels positifs vérifiant  $\lambda + \mu = 1$ , démontrer que la matrice  $\lambda A + \mu B$  est stochastique.
4. On note  $U \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$  le vecteur-colonne dont toutes les coordonnées valent 1. Prouver que  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  est stochastique si et seulement si tous ses coefficients sont positifs et  $AU = U$ .

## EXERCICE 3 ••○ Équation matricielle

Soient  $A$  et  $B$  deux matrices de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ . Résoudre l'équation suivante d'inconnue  $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  :

$$X = \text{Tr}(X)A + B$$

## EXERCICE 4 ••○ Propriétés de la trace

1. On se donne  $\varphi : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{K}$  une forme linéaire vérifiant :

$$\forall A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \quad \varphi(AB) = \varphi(BA)$$

Montrer que  $\varphi$  est proportionnelle à la trace.

On pourra appliquer la relation précédente avec les matrices élémentaires de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ .

2. À l'aide des matrices élémentaires de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ , déterminer une base de  $\text{Ker}(\text{Tr})$ .

## EXERCICE 5 ••○ Trace d'un endomorphisme

Soit  $A$  une matrice de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ . On définit une application  $\varphi$  en posant :

$$\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \quad \varphi(M) = AM - MA$$

1. Vérifier que  $\varphi$  définit un endomorphisme de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ .
2. Donner la matrice de  $\varphi$  dans la base canonique de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  et en déduire  $\text{Tr}(\varphi)$ .

**EXERCICE 6** ●●○ *Un pas vers la diagonalisation*

Soient  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie  $n$  et  $u$  un endomorphisme de  $E$  vérifiant  $u^3 - 6u^2 + 11u - 6\text{id}_E = 0$ . On introduit  $F_1 = \text{Ker}(u - \text{id}_E)$ ,  $F_2 = \text{Ker}(u - 2\text{id}_E)$  et  $F_3 = \text{Ker}(u - 3\text{id}_E)$ .

1. Pour  $x_1 \in F_1$  et  $k \in \mathbb{N}$ , exprimer  $u^k(x_1)$  en fonction de  $x_1$  et de  $k$ .
2. On se donne  $Q \in \mathbb{K}[X]$  et  $x = x_1 + x_2 + x_3$  avec  $x_i \in F_i$  pour  $i \in \{1, 2, 3\}$ . Prouver que :

$$Q(u)(x) = Q(1)x_1 + Q(2)x_2 + Q(3)x_3$$

3. En déduire que la somme  $F_1 + F_2 + F_3$  est directe.
4. Prouver que  $E = F_1 \oplus F_2 \oplus F_3$ .  
*On pourra procéder par analyse-synthèse.*
5. Exprimer la matrice de  $u$  dans une base adaptée à cette décomposition en somme directe.

**EXERCICE 7** ●●○ *Calculs de déterminants*

1. Calculer, pour  $n \in \mathbb{N}^*$ , le déterminant de taille  $n \times n$  suivant :
3. Soient  $x \in \mathbb{C}$ . On va calculer, pour  $n \in \mathbb{N}^*$ , le déterminant de la matrice  $C_n \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  suivante :

$$D_n = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 2 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

$$C_n = \begin{pmatrix} a & c & \cdots & \cdots & c \\ b & a & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & a & c \\ b & \cdots & \cdots & b & a \end{pmatrix}$$

2. Calculer, pour  $n \in \mathbb{N}^*$ , le déterminant suivant :

$$\begin{vmatrix} 1 & n & n & \cdots & n \\ n & 2 & n & \cdots & n \\ n & n & 3 & \cdots & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ n & n & n & \cdots & n \end{vmatrix}$$

- A. On note  $K_n$  la matrice de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  dont tous les coefficients sont égaux à 1. Montrer que l'application :  
$$P_n : x \mapsto \det(C_n + xK_n)$$
est un polynôme de degré au plus 1.
- B. En déduire  $\det(C_n)$ .

**EXERCICE 8** ●●○ *Sous-espaces stables*

Soient  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension  $n \geq 2$  et  $u \in \mathcal{L}(E)$  un endomorphisme.

1. On suppose dans cette question que, pour tout vecteur  $x \in E$ , la famille  $(x, u(x))$  est liée.
  - A. Justifier que pour tout  $x \in E$  il existe un scalaire  $\lambda_x$  tel que  $u(x) = \lambda_x x$ .
  - B. En déduire que  $u$  est une homothétie de  $E$  (c'est-à-dire qu'il existe  $\lambda \in \mathbb{K}$  tel que  $u = \lambda \text{id}_E$ ).  
*On fixera  $x_0 \in E$  non nul et on prouvera que  $\lambda_x = \lambda_{x_0}$  pour tout  $x \in E$  non nul en s'intéressant à  $\lambda_{x+x_0}$ .*
2. On suppose que toute droite vectorielle de  $E$  est stable par  $u$ .  
Montrer que  $u$  est une homothétie de  $E$ .
3. On suppose que  $n \geq 3$  et que tout plan vectoriel de  $E$  est stable par  $u$ .
  - A. Montrer que toute droite vectorielle de  $E$  peut s'écrire comme l'intersection de deux plans vectoriels de  $E$ .
  - B. En déduire que  $u$  est une homothétie de  $E$ .

**EXERCICE 9** ●●○ *Matrices semblables*

Soit  $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$  une matrice non nulle vérifiant  $A^3 + A = 0$ .

1. Montrer que  $\text{Im}(A) \subset \text{Ker}(A^2 + I_3)$  et en déduire  $\text{Ker}(A^2 + I_3) \neq \{0\}$ .
2. Prouver par l'absurde que  $\text{Ker}(A) \neq \{0\}$ .
3. Conclure que la matrice  $A$  est semblable à la matrice  $B$  suivante :

$$B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

**EXERCICE 10** ●●● *Écriture d'un sous-espace vectoriel comme intersection d'hyperplans*

Soient  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie  $n \geq 2$  et  $F$  un sous-espace vectoriel de  $E$  de dimension  $1 \leq p \leq n-1$ . Montrer que  $F$  peut s'écrire comme l'intersection de  $n-p$  hyperplans de  $E$ .