Exercice 8

6. On note $D(1,\dots,n)$ le déterminant étudié.

Par linéarité du déterminant par rapport à la 1ère colonne :

$$D(1,\dots,n) = \begin{vmatrix} a_1+b_1 & a_1 & \cdots & a_1 \\ a_2 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & a_1 \\ a_n & \cdots & \cdots & a_n+b_n \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_1 & a_1 & \cdots & a_1 \\ a_2 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & a_1 \\ a_n & \cdots & \cdots & a_n+b_n \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_1 & a_1 & \cdots & a_1 \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & a_1 \\ 0 & \cdots & \cdots & a_n+b_n \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ a_2 & b_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ a_n & 0 & \cdots \; 0 & b_n \end{vmatrix} + b_1 D(2,\dots,n)$$

$C_i \leftarrow C_i - C_1$ pour $i \geq 2$
sur le 1er déterminant
et DVP C_1 sur le 2ème.

$$= a_1 b_2 \cdots b_n + b_1 D(2,\dots,n)$$

DVP L_1

Par itération, puisque $D(n-1,n) = \begin{vmatrix} a_{n-1}+b_{n-1} & a_{n-1} \\ a_n & a_n+b_n \end{vmatrix}$

$$= a_{n-1} b_n + b_{n-1} a_n + b_{n-1} b_n ,$$

on obtient :

$$D(1,\dots,n) = \sum_{i=1}^{n} (b_1 \cdots a_i \cdots b_n) + \prod_{i=1}^{n} b_i ,$$

ce que l'on peut ensuite prouver par récurrence.

Exercice 9

Soit $\mathcal{B}_F = (e_1, .., e_p)$ une base de F que l'on complète en une base $\mathcal{B}_E = (e_1, ..., e_p, e_{p+1}, .., e_n)$ de E.

Pour $k \in [\![1, n]\!]$, soit $\varphi_k : \begin{array}{l} E \longrightarrow \mathbb{K} \\ \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \longmapsto x_k \end{array}$.

On peut facilement vérifier que φ_k est une forme linéaire non nulle $(\varphi_k(e_k) = 1 \neq 0)$.

Ainsi les $(\mathrm{Ker}(\varphi_k))_{k \in [\![1,n]\!]}$ sont des hyperplans de E par le cours.

Mais on a :

$$\begin{aligned} x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \in F &\iff \forall k \in [\![p+1, n]\!],\ x_k = 0 \\ &\iff \forall k \in [\![p+1, n]\!],\ \varphi_k(x) = 0 \\ &\iff \forall k \in [\![p+1, n]\!],\ x \in \mathrm{Ker}(\varphi_k) \\ &\iff x \in \bigcap_{k=p+1}^{n} \mathrm{Ker}(\varphi_k) \end{aligned}$$

Ainsi $F = \bigcap_{k=p+1}^{n} \mathrm{Ker}(\varphi_k)$ est l'intersection de $n-p$ hyperplans de E.