RÉDUCTION

T.D. N°3

EXERCICE 1 ●○○ — *Cas pratiques de diagonalisation*

Dans les cas suivants, dire si la matrice est diagonalisable sur $\mathbb{K}$ et la diagonaliser le cas échéant.

1. $A = \begin{pmatrix} -1 & 6 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -4 & 12 & 5 \end{pmatrix}$ **2.** $B = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 5 & 4 & -7 \\ -2 & 2 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ **3.** $C = \begin{pmatrix} 4 & -3 & -2 \\ 5 & -4 & -2 \\ 5 & -3 & -3 \end{pmatrix}$ **4.** $D = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -3 & 5 & -3 \\ -4 & 4 & -3 \end{pmatrix}$

EXERCICE 2 ●○○ — *Diagonalisabilité avec des paramètres*

1. Pour $a \in \mathbb{R}$, on pose :

$$M_a = \begin{pmatrix} 3-a & -5+a & a \\ -a & a-2 & a \\ 5 & -5 & -2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$$

Énoncer une condition nécessaire et suffisante pour que la matrice M_a soit diagonalisable.

2. On se donne $n \geqslant 2$ et $(a,b) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}^*$ et on pose :

$$M = \begin{pmatrix} a & & (b) \\ & \ddots & \\ (b) & & a \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$$

Donner les valeurs propres de M et étudier si elle est diagonalisable.

EXERCICE 3 ●○○ — *Cas pratique de trigonalisation*

On définit la matrice A suivante :

$$A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Étudier la diagonalisabilité puis la trigonalisabilité de A.
2. Montrer que A est semblable à la matrice T suivante :

$$T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

EXERCICE 4 ●○○ — *Éléments propres d'un endomorphisme sur les polynômes*

Pour $n \geqslant 1$, on définit l'application Φ suivante :

$$\Phi : \begin{array}{ccc} \mathbb{K}_n[X] & \longrightarrow & \mathbb{K}_n[X] \\ P & \longmapsto & P - (X+1)P' \end{array}$$

1. Montrer que Φ est un endomorphisme de $\mathbb{K}_n[X]$.
2. Justifier que Φ est diagonalisable et donner ses valeurs propres.
   On pourra écrire la matrice de Φ dans la base canonique de $\mathbb{K}_n[X]$.

Exercice 5 ●●○ — *Étude d'une équation matricielle*

On souhaite résoudre l'équation $(\mathrm{E}) : \mathrm{M}^2 - \mathrm{M} = \mathrm{A}$ d'inconnue $\mathrm{M} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ avec :

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}$$

1. Diagonaliser la matrice A en précisant une matrice de passage P.
2. Si $\mathrm{M} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ est solution de (E), justifier que $\mathrm{P}^{-1}\mathrm{MP}$ est diagonale.
On pourra vérifier que $\mathrm{P}^{-1}\mathrm{MP}$ *et* $\mathrm{P}^{-1}\mathrm{AP}$ *commutent.*
3. Donner l'ensemble des solutions de (E).

Exercice 6 ●●○ — *Étude du commutant d'une matrice*

On souhaite déterminer toutes les matrices $\mathrm{M} \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ qui commutent avec la matrice A suivante :

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

1. Diagonaliser la matrice A en précisant une matrice de passage P et la matrice diagonale D associée.
2. En déduire l'ensemble des matrices $\mathrm{M} \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ qui commutent avec A.
On pourra commencer par étudier les matrices qui commutent avec D.

Exercice 7 ●●○ — *Système de suites récurrentes*

On considère trois suites réelles $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $\left(y_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \begin{cases} x_{n+1} &= 2x_n + y_n + z_n \\ y_{n+1} &= x_n - y_n + z_n \\ z_{n+1} &= x_n + y_n - z_n \end{cases}$$

1. Déterminer l'expression de x_n, y_n et z_n en fonction de $n \in \mathbb{N}$, x_0, y_0 et z_0.
On pourra exprimer le système précédent sous forme matricielle.
2. Donner une condition nécessaire et suffisante sur x_0, y_0 et z_0 pour que ces trois suites convergent.

Exercice 8 ●●○ — *Manipulation des polynômes annulateurs*

Soient $n \geqslant 1$ et $\mathrm{A} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

1. On suppose que $\mathrm{A}^3 + \mathrm{A}^2 + \mathrm{A} = 0$. Montrer que $\operatorname{rg}\mathrm{A}$ est pair et que $\operatorname{Tr}\mathrm{A}$ est un entier.
2. On fait l'hypothèse que $2\mathrm{A}^3 + 3\mathrm{A}^2 - 6\mathrm{A} - \mathrm{I}_n = 0$. Montrer que A est diagonalisable sur $\mathbb{R}$.
3. On suppose que $\mathrm{A}^3 - 3\mathrm{A} - 4\mathrm{I}_n = 0$. Prouver que $\det(\mathrm{A}) > 0$.
4. Si A vérifie $\mathrm{A}^2 - \mathrm{A}^{\mathrm{T}} = \mathrm{I}_n$, prouver que A est diagonalisable.

Exercice 9 ●●○ — *Matrices nilpotentes*

Une matrice $\mathrm{A} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est dite nilpotente s'il existe un entier $p \geqslant 1$ tel que $\mathrm{A}^p = 0$.

1. Soit $\mathrm{A} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice complexe. Prouver que A est nilpotente si et seulement si $\operatorname{sp}(\mathrm{A}) = \{0\}$.
2. On se donne $\mathrm{A} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice nilpotente. Montrer que $\mathrm{A}^n = 0$.
3. Pour $\mathrm{A} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$, déterminer tous les polynômes $\mathrm{P} \in \mathbb{C}[\mathrm{X}]$ tels que la matrice $\mathrm{P}(\mathrm{A})$ soit nilpotente.

Exercice 10 ●●○ *Matrices de rang 1*

Montrer qu'une matrice $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ de rang 1 est diagonalisable si et seulement si $\mathrm{Tr}(M) \neq 0$.
On pourra commencer par chercher une valeur propre « évidente » de M.

Exercice 11 ●●○ *Matrice nilpotente*

Soient $n \geqslant 1$ et $A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $AB - BA = A$.

1. Démontrer que :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad A^k B - BA^k = kA^k$$

2. On définit l'endomorphisme φ de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ suivant :

$$\varphi : \begin{array}{rcl} \mathscr{M}_n(\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathscr{M}_n(\mathbb{K}) \\ M & \longmapsto & MB - BM \end{array}$$

   a. Soit $k \in \mathbb{N}$. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que la matrice A^k soit vecteur propre de φ.

   b. En déduire qu'il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $A^k = 0$.

Exercice 12 ●●○ *Diagonalisabilité d'un endomorphisme de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$*

Soient $a \in \mathbb{R}$ et $n \geqslant 2$. On définit l'endomorphisme F de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ suivant :

$$F : \begin{array}{rcl} \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \\ M & \longmapsto & aM + \mathrm{Tr}(M) I_n \end{array}$$

1. Déterminer un polynôme annulateur de degré 2 de F.
2. Donner les valeurs propres de F et étudier si F est diagonalisable.
3. En déduire $\det(F)$.

Exercice 13 ●●○ *Matrice circulante*

Soient $n \geqslant 2$ et $(a_0, \dots, a_{n-1}) \in \mathbb{C}^n$. On définit les deux matrices suivantes de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$:

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & & & \ddots & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad A = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} \\ a_{n-1} & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & a_2 \\ a_2 & & \ddots & \ddots & a_1 \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} & a_0 \end{pmatrix}$$

1. Montrer que J est diagonalisable et la diagonaliser.
2. En déduire que A est diagonalisable et la diagonaliser.
3. Calculer $\det A$.

Exercice 14 ●●● *Diagonalisabilité d'une matrice par blocs*

Soient $n \geqslant 1$ et $A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant $AB = BA$. On introduit la matrice $M \in \mathscr{M}_{2n}(\mathbb{R})$ par blocs suivante :

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & A \end{pmatrix}$$

1. Démontrer que pour tout polynôme P de $\mathbb{R}[X]$ on a :

$$P(M) = \begin{pmatrix} P(A) & P'(A)B \\ 0 & P(A) \end{pmatrix}$$

2. Énoncer une condition nécessaire et suffisante sur A et B pour que M soit diagonalisable.

Exercice 15 ●●● *Matrices à coefficients entiers*

Soit $A \in \mathscr{M}_2(\mathbb{Z})$ une matrice carrée de taille 2 à coefficients entiers qui vérifie $A^n = I_2$ pour un certain entier $n \in \mathbb{N}^*$. Prouver que l'on a nécessairement $A^{12} = I_2$.