SUITES ET SÉRIES DE FONCTIONS

T.D. N°4

Exercice 1 ●○○ — *Suites de fonctions*

Dans chacun des cas suivants, étudier les convergences simple et uniforme de la suite de fonctions (f_n).

1. $\forall (n,x) \in \mathbb{N}\times\mathbb{R},\quad f_n(x) = \dfrac{nx}{1+n^2x^2}$
2. $\forall (n,x) \in \mathbb{N}\times\mathbb{R},\quad f_n(x) = \dfrac{nx^3}{1+nx^2}$
3. $\forall (n,x) \in \mathbb{N}\times\mathbb{R}_+,\quad f_n(x) = nx^2e^{-nx}$
4. $\forall (n,x) \in \mathbb{N}\times[0,1],\quad f_n(x) = n^\alpha x(1-x)^n$
   (avec $\alpha \in \mathbb{N}$)
5. $\forall (n,x) \in \mathbb{N}\times[0,1],\quad f_n(x) = \dfrac{1-x^n}{1+x^{2n}}$
6. $\forall (n,x) \in \mathbb{N}\times\mathbb{R}_+,\quad f_n(x) = \ln\left(1+\dfrac{x}{n}\right)$
7. $\forall (n,x) \in \mathbb{N}\times\mathbb{R},\quad f_n(x) = \dfrac{1}{1+(x+n)^2}$
8. $\forall (n,x) \in \mathbb{N}\times\mathbb{R},\quad f_n(x) = \sin\left(\dfrac{x}{2^n}\right)$

Exercice 2 ●●○ — *Convergence uniforme et sommes géométriques*

Pour $n \geqslant 1$ et $x \in \mathbb{R}$, on pose :

$$f_n(x) = 1 + x + \cdots + x^{n-1}$$

1. Étudier la convergence simple de la suite de fonctions $(f_n)_{n\geqslant 1}$.
   On note $f(x)$ la limite de la suite $(f_n(x))_{n\geqslant 1}$ lorsque cette limite existe.
2. On pose, pour $n \geqslant 1$ et $x \in]-1,1[$, $\varphi_n(x) = f(x) - f_n(x)$. Vérifier que :

   $$\varphi_n(x) = \frac{x^n}{1-x}$$

   Quelle est la limite de φ_n en 1 ?
   En déduire que la convergence n'est pas uniforme sur $]-1,1[$.
3. Soit $a \in]0,1[$. Démontrer que $(f_n)_{n\geqslant 1}$ converge uniformément vers f sur $[-a,a]$.

Exercice 3 ●●○ — *Convergence uniforme d'une suite de fonctions*

On pose, pour $n \geqslant 1$ et $x \in]0,1]$, $f_n(x) = nx^n\ln(x)$ et $f_n(0) = 0$.

1. Démontrer que $(f_n)_{n\geqslant 1}$ converge simplement sur $[0,1]$ vers une fonction f que l'on précisera.
   On note ensuite $g = f - f_n$.
2. Étudier les variations de g.
3. En déduire que la convergence de $(f_n)_{n\geqslant 1}$ vers f n'est pas uniforme sur $[0,1]$.
4. Soit $a \in [0,1[$. En remarquant qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $e^{-1/n} \geqslant a$ pour tout $n \geqslant n_0$, démontrer que la suite $(f_n)_{n\geqslant 1}$ converge uniformément vers f sur $[0,a]$.

Exercice 4 ●●● — *Convergence uniforme de polynômes sur $\mathbb{R}$*

Soit $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions polynomiales convergeant uniformément sur $\mathbb{R}$ vers une fonction f.
Montrer que f est polynomiale.

Exercice 5 ●○○ — *Séries de fonctions*

Dans chacun des cas suivants, étudier les convergences simple, normale et uniforme de la série de fonctions $\sum u_n$.

1. $\forall (n,x) \in \mathbb{N} \times \mathbb{R}, \quad u_n(x) = x^{2n}$
2. $\forall (n,x) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{R}, \quad u_n(x) = \dfrac{(-1)^n}{n^x}$
3. $\forall (n,x) \in \mathbb{N} \times \mathbb{R}_+, \quad u_n(x) = \dfrac{nx^2}{1+n^3x}$
4. $\forall (n,x) \in \mathbb{N} \times \mathbb{R}, \quad u_n(x) = xe^{-nx^2}$
5. $\forall (n,x) \in \mathbb{N} \times [0,1], \quad u_n(x) = x^n(1-x^n)$
6. $\forall (n,x) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{R}, \quad u_n(x) = \dfrac{(-1)^n x^2}{x^4+n}$

Exercice 6 ●○○ — *Étude d'une série de fonction*

Pour $n \geqslant 1$, on définit la fonction u_n sur $\mathbb{R}_+$ en posant :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad u_n(x) = \frac{\ln(n+x)}{n^2+x}$$

1. Étudier la convergence simple et normale de la série de fonctions $\sum u_n$.
   On notera S la somme de cette série de fonctions.
2. Montrer que S est continue sur $\mathbb{R}_+$.
3. Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{S}(x)$.

Exercice 7 ●○○ — *Étude d'une série de fonction*

Pour $n \geqslant 1$, on définit la fonction u_n sur $\mathbb{R}$ en posant :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad u_n(x) = \frac{\sin(nx)}{n^3}$$

1. Étudier la convergence normale de la série de fonctions $\sum u_n$.
   On notera S la somme de cette série de fonctions.
2. Déterminer $\lim\limits_{x\to 0} \mathrm{S}(x)$.
3. Montrer que :

$$\int_0^{\pi} \mathrm{S}(x)\,\mathrm{d}x = 2\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n-1)^4}$$

4. Prouver que S est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et exprimer sa dérivée.

Exercice 8 ●●○ — *Étude d'une série de fonction*

Pour $n \geqslant 1$, on définit la fonction u_n sur $\mathbb{R}_+$ en posant :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad u_n(x) = \frac{1}{n(1+nx^2)}$$

1. Donner le domaine de définition $\mathrm{D} \subset \mathbb{R}_+$ de la série de fonctions $\sum u_n$.
   On notera S la somme de cette série de fonctions sur D.
2. Étudier la continuité de S sur D.
3. Déterminer un équivalent de S au voisinage de $+\infty$.

Exercice 9 ●●○ — *Étude d'une série de fonction*

Pour $n \geqslant 0$, on définit la fonction u_n sur $\mathbb{R}_+$ en posant :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad u_n(x) = \frac{e^{-nx}}{1+n^2}$$

1. Étudier les différents types de convergence de la série de fonctions $\sum u_n$ sur $\mathbb{R}_+$.
   On notera S la somme de cette série de fonctions.
2. Montrer que S est continue sur $\mathbb{R}_+$.
3. Prouver que S est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+^*$. S est-elle dérivable en 0 ?
4. Trouver une équation différentielle du second ordre satisfaite par S.
5. Déterminer $\lim_{x\to+\infty} \mathrm{S}(x)$.

Exercice 10 ●●○ *Étude d'une série de fonction*

Pour $n \geqslant 1$, on définit la fonction u_n sur $\mathbb{R}$ en posant :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad u_n(x) = \frac{\operatorname{Arctan}(nx)}{n^2}$$

1. Étudier les différents types de convergence de la série de fonctions $\sum u_n$ sur $\mathbb{R}$.
   On notera S la somme de cette série de fonctions.
2. Montrer que S admet une limite finie en $+\infty$.
3. Prouver que S est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$.
4. Calculer $\lim_{x\to 0} \mathrm{S}'(x)$.

Exercice 11 ●●○ *Étude d'une série de fonction*

Pour $n \geqslant 1$, on définit la fonction u_n sur $]-1,+\infty[$ en posant :

$$\forall x > -1, \quad u_n(x) = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+x}$$

1. Montrer que la série de fonctions $\sum u_n$ est définie et continue sur $]-1,+\infty[$.
   On notera S la somme de cette série de fonctions.
2. Étudier la monotonie de S.
3. Pour $x > -1$, calculer $\mathrm{S}(x+1) - \mathrm{S}(x)$ et en déduire un équivalent de S en -1^+.
4. Établir que : $$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \mathrm{S}(n) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$
5. En déduire un équivalent de S au voisinage de $+\infty$

Exercice 12 ●●● *Étude d'une série de fonction*

Pour $n \geqslant 1$, on définit la fonction u_n sur $]0,\pi[$ en posant :

$$\forall x \in]0,\pi[, \quad u_n(x) = \frac{1}{n}\cos^n(x)\sin(nx)$$

1. Montrer que la série de fonctions $\sum u_n$ est définie et de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0,\pi[$.
   On notera S la somme de cette série de fonctions.
2. Calculer f' et en déduire f sur $]0,\pi[$.

Exercice 13 ●●● *Étude d'une série de fonction*

On définit une fonction f, sous réserve de convergence de la série, en posant :

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n \sin(nx)}{n}$$

1. Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites et, pour $n \in \mathbb{N}$, $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$.

Si $n, N \in \mathbb{N}$ vérifient $n+1 \leqslant N$, montrer que :

$$\sum_{k=n+1}^{N} u_k v_k = \sum_{k=n}^{N} S_k (v_k - v_{k+1}) + S_N v_{N+1} - S_n v_n$$

2. Montrer que f est bien définie et de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]-1,1[$ et calculer f'.

3. En déduire que :

$$\forall x \in]-1,1[, \quad f(x) = \operatorname{Arctan}\left(\frac{x\sin(x)}{1 - x\cos(x)}\right)$$

4. À l'aide de la question **1.**, montrer que la convergence de la série est uniforme sur $[-1,1]$.

5. Calculer, en cas de convergence, les deux sommes suivantes :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(n)}{n} \quad \text{et} \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n \sin(n)}{n}$$