ESPACES VECTORIELS NORMÉS

T.D. N°4

Exercice 1 ●○○ *Comparaison des normes usuelles*

On considère les normes $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ et $\|\cdot\|_\infty$ sur $\mathbb{R}^n$. On fixe $x \in \mathbb{R}^n$. Montrer que :

$$\|x\|_\infty \leqslant \|x\|_1, \quad \|x\|_\infty \leqslant \|x\|_2, \quad \|x\|_2 \leqslant \|x\|_1, \quad \|x\|_2 \leqslant \sqrt{n}\|x\|_\infty, \quad \|x\|_1 \leqslant \sqrt{n}\|x\|_2 \quad \text{et} \quad \|x\|_1 \leqslant n\|x\|_\infty$$

Exercice 2 ●○○ *Boule unité*

On définit une application sur $\mathbb{R}^2$ en posant :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad \mathrm{N}((x,y)) = \max\big(|x|, |y|, |x-y|\big)$$

1. Prouver que N est une norme sur $\mathbb{R}^2$.
2. Dessiner la boule unité fermée pour la norme N dans le plan $\mathbb{R}^2$.

Exercice 3 ●○○ *Études de normes sur $\mathbb{R}_n[X]$ et $\mathbb{R}^n$*

1. Pour $n \in \mathbb{N}$ et $a_0, \dots, a_n$ des réels deux à deux distincts, on définit une application N sur $\mathbb{R}_n[X]$ en posant :

$$\forall P \in \mathbb{R}_n[X], \quad \mathrm{N}(P) = \max_{k \in [\![0,n]\!]} |P(a_k)|$$

Prouver que N définit une norme sur $\mathbb{R}_n[X]$.

2. Pour $n \geqslant 1$ et $a_1, \dots, a_n$ des réels, on définit une application N sur $\mathbb{R}^n$ en posant :

$$\forall (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n, \quad \mathrm{N}(x_1, \dots, x_n) = a_1|x_1| + \dots + a_n|x_n|$$

Donner une condition nécessaire et suffisante sur les réels $a_1, \dots, a_n$ pour que N soit une norme sur $\mathbb{R}^n$.

Exercice 4 ●●○ *Étude d'une norme matricielle*

Pour toute matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et tout vecteur $X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, on pose :

$$\|A\| = \max_{i \in [\![1,n]\!]} \left(\sum_{j=1}^{n} |a_{i,j}|\right) \qquad \text{et} \qquad \mathrm{N}(X) = \max_{i \in [\![1,n]\!]} |x_i|$$

1. Vérifier que $\|\cdot\|$ définit une norme sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.
2. Prouver que :

$$\forall A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}), \quad \forall X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}), \quad \mathrm{N}(AX) \leqslant \|A\|\mathrm{N}(X)$$

3. En déduire que :

$$\|A\| = \sup_{\substack{X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \\ \mathrm{N}(X)=1}} \mathrm{N}(AX)$$

Exercice 5 ●●○ — *Un exemple de deux normes non équivalentes*

Pour tout polynôme $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ de $\mathbb{R}[X]$, on pose :

$$N_0(P) = \sum_{k=0}^{n} \frac{|a_k|}{2^k} \quad \text{et} \quad N_1(P) = \left|\sum_{k=0}^{n} a_k\right| + \sum_{k=1}^{n} \frac{|a_k|}{2^k}$$

1. Montrer que N_0 et N_1 sont des normes sur $\mathbb{R}[X]$.
2. Étudier la limite de la suite de polynômes $(X^n)_{n\in\mathbb{N}}$ pour les normes N_0 et N_1.
   Est-ce contradictoire avec ce qui a été vu en cours ?

Exercice 6 ●○○ — *Parties ouvertes et fermées*

Pour chacune des parties de $\mathbb{R}^2$ suivantes, étudier si elles sont ouvertes ou fermées :

$$A = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2,\ y > x\right\},\quad B = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2,\ y \leqslant x \ \text{ et } \ x \leqslant 1\right\} \quad \text{et} \quad C = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2,\ x > 0 \ \text{ et } \ y \leqslant 0\right\}$$

Exercice 7 ●○○ — *Intérieur, frontière et adhérence*

Déterminer l'adhérence, l'intérieur et la frontière de l'ensemble suivant :

$$A = \left\{\frac{1}{x+n} + \frac{1}{2^n},\ (x, n) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{N}^*\right\}$$

Exercice 8 ●●○ — *Convergence de suites matricielles*

1. On fixe $a \in \mathbb{R}$. Pour tout $p \geqslant 1$, on pose :

$$A_p = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{a}{p} \\ \frac{a}{p} & 1 \end{pmatrix}$$

   1.1. Pour $p \geqslant 1$, prouver que A_p est diagonalisable dans $\mathscr{M}_2(\mathbb{C})$ et la diagonaliser.
   1.2. En déduire, si elle existe, la limite de la suite matricielle $\left(A_p\right)_{p\in\mathbb{N}^*}$.

2. Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $3A^3 = A^2 + A + I_n$.

   2.1. Montrer que A est diagonalisable dans $\mathbb{C}$.
   2.2. Prouver que la suite $(A^p)_{p\in\mathbb{N}}$ converge vers la matrice L d'un projecteur.
   2.3. Exprimer L en fonction de A.

3. On suppose $n \geqslant 2$.

   3.1. Montrer que $S_n(\mathbb{R})$ et $A_n(\mathbb{R})$ sont des parties fermées de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.
   3.2. Soit $A \in A_n(\mathbb{R})$. Montrer que si la suite $(A^p)_{p\in\mathbb{N}}$ converge alors sa limite est la matrice nulle.

Exercice 9 ●●○ — *Espace normé fonctionnel*

Dans la suite, on désigne par E l'ensemble $\mathscr{C}([0,1],\mathbb{R})$ des fonctions définies et continues sur $[0,1]$ et à valeurs réelles.
On introduit les deux normes suivantes sur E :

$$\forall f \in E,\quad \|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)|\,\mathrm{d}t \qquad \text{et} \qquad \|f\|_\infty = \sup_{t\in[0,1]} |f(t)|$$

1. Pour tout $n \geqslant 1$, on pose :

$$\forall t \in [0,1], \quad f_n(t) = \begin{cases} -nt+1 & \text{si } t \in \left[0, \frac{1}{n}\right] \\ 0 & \text{si } t \in \left]\frac{1}{n}, 1\right] \end{cases}$$

Étudier la convergence de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ dans E pour les normes $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_\infty$.
Commenter le résultat.

2. On note η la fonction définie sur $[0,1]$ constante égale à 1 et on pose $\mathrm{F} = \{f \in \mathrm{E},\ f(0) = 0\}$.
Prouver que η est adhérente à F pour la norme $\|\cdot\|_1$.
Que se passe-t-il si l'on considère $\|\cdot\|_\infty$?

3. Démontrer que les deux applications suivantes sont continues sur E muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$:

$$\phi : \begin{array}{ccc} \mathrm{E} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ f & \longmapsto & f(0)-1 \end{array} \qquad \text{et} \qquad \psi : \begin{array}{ccc} \mathrm{E} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ f & \longmapsto & \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t \end{array}$$

En déduire que l'ensemble :

$$\mathrm{A} = \left\{f \in \mathrm{E},\ f(0) = 1 \ \text{ et } \ \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t = 0\right\}$$

est une partie fermée dans E muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$.

Exercice 10 ••• *Un peu de topologie*

Soit E un espace vectoriel normé.

1. Si A et B sont deux parties de E telles que $\mathrm{A} \subset \mathrm{B}$, prouver que $\mathring{\mathrm{A}} \subset \mathring{\mathrm{B}}$ et que $\overline{\mathrm{A}} \subset \overline{\mathrm{B}}$.
2. Soit A une partie convexe de E. Montrer que $\overline{\mathrm{A}}$ est convexe.
3. On suppose E de dimension finie et on se donne V un sous-espace vectoriel de E.
   - **a.** Montrer que V est une partie fermée.
   - **b.** On suppose que $0 \in \mathring{\mathrm{V}}$. Prouver que $\mathrm{V} = \mathrm{E}$.
   - **c.** Plus généralement, si on suppose $\mathring{\mathrm{V}} \neq \emptyset$, prouver que $\mathrm{V} = \mathrm{E}$.

Exercice 11 ••• *Distance à une partie non vide*

Soit A une partie non vide d'un espace vectoriel normé E. On notera d la distance associée à la norme de E. Pour $x \in \mathrm{E}$, on appelle *distance de x à* A la quantité :

$$d(x,\mathrm{A}) = \inf_{a\in\mathrm{A}} d(x,a)$$

1. Montrer que l'application $x \in \mathrm{E} \mapsto d(x,\mathrm{A}) \in \mathbb{R}$ est $1-$lipschitzienne et donc continue.
On pourra commencer par montrer que $d(x,\mathrm{A}) - d(y,\mathrm{A}) \leqslant d(x,y)$.
2. Soit $x \in \mathrm{E}$. Prouver que $d(x,\mathrm{A}) = 0$ si et seulement si $x \in \overline{\mathrm{A}}$.
3. Pour $\mathrm{R} > 0$ on pose $\mathrm{A}(\mathrm{R}) = \{x \in \mathrm{E},\ d(x,\mathrm{A}) \leqslant \mathrm{R}\}$. Montrer que si A est convexe alors A(R) est convexe et fermé.

Exercice 12 ••• *Densité des matrices diagonalisables dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$*

1. Justifier que l'ensemble des matrices diagonalisables dans $\mathbb{C}$ est dense dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$.
2. En déduire une preuve de théorème de Cayley-Hamilton.
On commencera par prouver le théorème pour une matrice diagonalisable avant de traiter le cas général.
3. Le résultat de la question **1.** est-il valable sur $\mathbb{R}$?