ESPACES VECTORIELS NORMÉS

Quelques corrigés du T.D. n°4

Exercice 10 ••• *Un peu de topologie*

Soit E un espace vectoriel normé.

1. Si A et B sont deux parties de E telles que $A \subset B$, prouver que $\mathring{A} \subset \mathring{B}$ et que $\overline{A} \subset \overline{B}$.

On prouve la première inclusion. Soit $x \in \mathring{A}$. Par définition, il existe $r > 0$ tel que $B(x, r) \subset A$. Mais $A \subset B$ donne $B(x, r) \subset B$, ce qui prouve que $x \in \mathring{B}$.

Pour la seconde inclusion, on utilise la caractérisation séquentielle des points adhérents. Si $x \in \overline{A}$, il existe une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de A qui converge vers x. Mais $A \subset B$ donne que cette suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est aussi une suite de B qui converge vers x. Ainsi $x \in \overline{B}$.

2. Soit A une partie convexe de E. Montrer que $\overline{A}$ est convexe.

On utilise la caractérisation séquentielle des points adhérents. On se donne x et y deux points de $\overline{A}$ et $\lambda \in [0,1]$ et on va prouver que $\lambda x + (1-\lambda) y$ est encore dans $\overline{A}$. Comme x et y sont deux points de $\overline{A}$, il existe des suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $\left(y_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ de A qui convergent respectivement vers x et y. Par convexité de A, la suite $(\lambda x_n + (1-\lambda) y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de A qui converge vers $\lambda x + (1-\lambda) y$ de sorte que l'on obtient bien $\lambda x + (1-\lambda) y \in \overline{A}$.

3. On suppose E de dimension finie et on se donne V un sous-espace vectoriel de E.

a. Montrer que V est une partie fermée.

Puisque E est de dimension finie, on se donne $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_p, e_{p+1}, \ldots, e_q)$ une base de E adaptée à V, c'est-à-dire que $\mathscr{B}_V = (e_1, \ldots, e_p)$ est une base de V. On va montrer que V est fermée par caractérisation séquentielle. On se donne une suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de V qui converge vers $v \in E$ et on va montrer que $v \in V$. On introduit les suites coordonnées $(v_n^{(k)})_{n\in\mathbb{N}}$ pour $k \in [\![1, q]\!]$ de la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans la base $\mathscr{B}$ en écrivant :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_n = \sum_{k=1}^{q} v_n^{(k)} e_k$$

Puisque la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers v, on sait que les suites coordonnées convergent toutes vers les coordonnées $(v^{(k)})_{1\leqslant k\leqslant q}$ de v dans la base $\mathscr{B}$, c'est-à-dire que :

$$v = \sum_{k=1}^{q} v^{(k)} e_k$$

Mais, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $v_n \in F$, ce qui donne $v_n^{(k)} = 0$ pour tout $k > p$. Par passage à la limite et unicité de la limite, cela donne $v^{(k)} = 0$ pour $k > p$. Ainsi v se décompose uniquement sur les vecteurs $e_1, \ldots, e_p$ de F et on conclut bien que $v \in F$.

b. On suppose que $0 \in \mathring{V}$. Prouver que $V = E$.

L'inclusion $V \subset E$ est triviale. Prouvons que $E \subset V$. On se donne donc $x \in E$. Par hypothèse, $0 \in \mathring{V}$ donc il existe $r > 0$ tel que $B(0, r) \subset V$. Dès lors :

- Si $x = 0$, on a trivialement $x \in V$ puisque V est un espace vectoriel.
- Si $x \neq 0$, le vecteur $y = rx/(2\|x\|)$ est dans $B(0, r)$ puisque $\|y\| = r/2 < r$. Avec l'hypothèse on a que $y \in V$. Mais V est un espace vectoriel donc on obtient $x = 2\|x\|/r \cdot y \in V$.

Dans tous les cas on a bien $x \in V$, ce qui prouve $E \subset V$ et donc $V = E$.

c. Plus généralement, si on suppose $\mathring{V} \neq \emptyset$, prouver que $V = E$.

Si $\mathring{V} \neq \emptyset$, on peut se donner $x \in \mathring{V}$ et il existe $r > 0$ tel que $B(x, r) \subset V$. L'ensemble V étant un sous-espace vectoriel et puisque $x \in \mathring{V} \subset V$, l'ensemble $\left\{y - x,\ y \in B(x, r)\right\} = B(0, r)$ est encore inclus dans V. Cela prouve que $0 \in \mathring{V}$ et la question précédente permet de conclure.

Exercice 11 ••• *Distance à une partie non vide*

Soit A une partie non vide d'un espace vectoriel normé E. On notera d la distance associée à la norme de E. Pour $x \in \mathrm{E}$, on appelle *distance de x à* A la quantité :

$$d(x, \mathrm{A}) = \inf_{a \in \mathrm{A}} d(x, a)$$

1. Montrer que l'application $x \in \mathrm{E} \mapsto d(x, \mathrm{A}) \in \mathbb{R}$ est $1-$lipschitzienne et donc continue.
On pourra commencer par montrer que $d(x, \mathrm{A}) - d(y, \mathrm{A}) \leqslant d(x, y)$.

On fixe $(x, y) \in \mathrm{A}^2$. On se donne $a \in \mathrm{A}$. On a alors par inégalité triangulaire $d(x, a) \leqslant d(x, y) + d(y, a)$. La borne inférieure étant un minorant, on obtient $d(x, \mathrm{A}) \leqslant d(x, y) + d(y, a)$. Cela donne que $d(x, \mathrm{A}) - d(x, y)$ est un minorant de tous les $d(y, a)$ pour $a \in \mathrm{A}$, ce qui implique, par définition de la borne inférieure, que $d(x, \mathrm{A}) - d(x, y) \leqslant d(y, \mathrm{A})$. Finalement on a bien prouvé $d(x, \mathrm{A}) - d(y, \mathrm{A}) \leqslant d(x, y)$. Par symétrie des rôles de x et y et de la distance, on a aussi $d(y, \mathrm{A}) - d(x, \mathrm{A}) \leqslant d(x, y)$. En combinant ces deux informations, on trouve que $|d(x, \mathrm{A}) - d(y, \mathrm{A})| \leqslant d(x, y)$. La fonction définie est ainsi $1-$lipschitzienne et donc continue.

2. Soit $x \in \mathrm{E}$. Prouver que $d(x, \mathrm{A}) = 0$ si et seulement si $x \in \overline{\mathrm{A}}$.

On procède par double-implication.

- Supposons $d(x, \mathrm{A}) = 0$. Par définition de la borne inférieure, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $a_n \in \mathrm{A}$ tel que $0 \leqslant d(x, a_n) \leqslant 1/n$. On vient ainsi de créer une suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de A qui converge vers x puisque $d(x, a_n) \to 0$ par encadrement. Cela donne $x \in \overline{\mathrm{A}}$.
- Réciproquement, on suppose $x \in \overline{\mathrm{A}}$. Par caractérisation séquentielle, il existe une suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de A qui converge vers x. On a alors $0 \leqslant d(x, \mathrm{A}) \leqslant d(x, a_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ puisque la borne inférieure est un minorant et que la distance est positive. Par passage à la limite, étant donné que $d(x, a_n) \to 0$ puisque $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers x, il vient bien $d(x, \mathrm{A}) = 0$.

3. Pour $\mathrm{R} > 0$ on pose $\mathrm{A(R)} = \{x \in \mathrm{E},\ d(x, \mathrm{A}) \leqslant \mathrm{R}\}$. Montrer que si A est convexe alors A(R) est convexe et fermé.

Prouvons la convexité. On se donne x et y dans A(R) et $\lambda \in [0, 1]$. Prouvons que $\lambda x + (1-\lambda) y \in \mathrm{A(R)}$. On se donne $(a_1, a_2) \in \mathrm{A}^2$. Par convexité de A, $\lambda a_1 + (1-\lambda) a_2$ est dans A. Ainsi, par inégalité triangulaire, homogénéité de la norme et positivité de λ et $1 - \lambda$:

$$\begin{aligned} d(\lambda x + (1-\lambda) y, \mathrm{A}) \leqslant d(\lambda x + (1-\lambda) y, \lambda a_1 + (1-\lambda) a_2) &= \|\lambda x + (1-\lambda) y - (\lambda a_1 + (1-\lambda) a_2)\| \\ &= \|\lambda(x - a_1) + (1-\lambda)(y - a_2)\| \\ &\leqslant \lambda \|x - a_1\| + (1-\lambda)\|y - a_2\| = \lambda d(x, a_1) + (1-\lambda) d(y, a_2) \end{aligned}$$

Ainsi, si on fixe a_2, le terme $d(\lambda x + (1-\lambda) y, \mathrm{A}) - (1-\lambda) d(y, a_2)$ est un minorant des $\lambda d(x, a_1)$ pour $a_1 \in \mathrm{A}$. Par définition d'une borne inférieure, cela donne $d(\lambda x + (1-\lambda) y, \mathrm{A}) - (1-\lambda) d(y, a_2) \leqslant \lambda d(x, \mathrm{A})$. En passant de la même façon à la borne inférieure sur les $a_2 \in \mathrm{A}$, on obtient :

$$d(\lambda x + (1-\lambda) y, \mathrm{A}) \leqslant \lambda d(x, \mathrm{A}) + (1-\lambda) d(y, \mathrm{A}) \leqslant \lambda \mathrm{R} + (1-\lambda) \mathrm{R} = \mathrm{R}$$

où l'on a utilisé le fait que x et y sont dans A(R). Cela permet de conclure.

Prouvons que A(R) est fermé par caractérisation séquentielle. On se donne $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de A(R) qui converge vers $x \in \mathrm{E}$ et on va montrer que $x \in \mathrm{A(R)}$. La suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ étant à valeurs dans A(R), on a $d(x_n, \mathrm{A}) \leqslant \mathrm{R}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Par passage à la limite dans cette inégalité, en utilisant la caractérisation séquentielle de la continuité de l'application étudiée à la question **1** qui donne $d(x_n, \mathrm{A}) \to d(x, \mathrm{A})$ lorsque n tend vers $+\infty$, on obtient $d(x, \mathrm{A}) \leqslant \mathrm{R}$, c'est-à-dire $x \in \mathrm{A(R)}$.