ESPACES VECTORIELS NORMÉS

Quelques corrigés du T.D. n°4

Exercice 10 ••• Un peu de topologie

Soit E un espace vectoriel normé.

1. Si A et B sont deux parties de E telles que $A \subset B$, prouver que $\mathring{A} \subset \mathring{B}$ et que $\overline{A} \subset \overline{B}$.

On prouve la première inclusion. Soit $x \in \mathring{A}$. Par définition, il existe $r > 0$ tel que $B(x, r) \subset A$. Mais $A \subset B$ donne $B(x, r) \subset B$, ce qui prouve que $x \in \mathring{B}$.

Pour la seconde inclusion, on utilise la caractérisation séquentielle des points adhérents. Si $x \in \overline{A}$, il existe une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de A qui converge vers x. Mais $A \subset B$ donne que cette suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est aussi une suite de B qui converge vers x. Ainsi $x \in \overline{B}$.

2. Soit A une partie convexe de E. Montrer que $\overline{A}$ est convexe.

On utilise la caractérisation séquentielle des points adhérents. On se donne x et y deux points de $\overline{A}$ et $\lambda \in [0, 1]$ et on va prouver que $\lambda x + (1 - \lambda)y$ est encore dans $\overline{A}$. Comme x et y sont deux points de $\overline{A}$, il existe des suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $\left(y_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ de A qui convergent respectivement vers x et y. Par convexité de A, la suite $(\lambda x_n+(1-\lambda) y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de A qui converge vers $\lambda x + (1 - \lambda)y$ de sorte que l'on obtient bien $\lambda x + (1 - \lambda)y \in \overline{A}$.

3. On suppose E de dimension finie et on se donne V un sous-espace vectoriel de E.

a. Montrer que V est une partie fermée.

Puisque E est de dimension finie, on se donne $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_p, e_{p+1}, \dots, e_q)$ une base de E adaptée à V, c'est-à-dire que $\mathscr{B}_V = (e_1, \dots, e_p)$ est une base de V. On va montrer que V est fermée par caractérisation séquentielle. On se donne une suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de V qui converge vers $v \in E$ et on va montrer que $v \in V$. On introduit les suites coordonnées $(v_n^{(k)})_{n\in\mathbb{N}}$ pour $k \in [\![1, q]\!]$ de la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans la base $\mathscr{B}$ en écrivant :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_n = \sum_{k=1}^{q} v_n^{(k)} e_k$$

Puisque la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers v, on sait que les suites coordonnées convergent toutes vers les coordonnées $(v^{(k)})_{1\leqslant k\leqslant q}$ de v dans la base $\mathscr{B}$, c'est-à-dire que :

$$v = \sum_{k=1}^{q} v^{(k)} e_k$$

Mais, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $v_n \in F$, ce qui donne $v_n^{(k)} = 0$ pour tout $k > p$. Par passage à la limite et unicité de la limite, cela donne $v^{(k)} = 0$ pour $k > p$. Ainsi v se décompose uniquement sur les vecteurs $e_1, \dots, e_p$ de F et on conclut bien que $v \in F$.

b. On suppose que $0 \in \mathring{V}$. Prouver que $V = E$.

L'inclusion $V \subset E$ est triviale. Prouvons que $E \subset V$. On se donne donc $x \in E$. Par hypothèse, $0 \in \mathring{V}$ donc il existe $r > 0$ tel que $B(0, r) \subset V$. Dès lors :

- Si $x = 0$, on a trivialement $x \in V$ puisque V est un espace vectoriel.
- Si $x \neq 0$, le vecteur $y = rx/(2\|x\|)$ est dans $B(0, r)$ puisque $\|y\| = r/2 < r$. Avec l'hypothèse on a que $y \in V$. Mais V est un espace vectoriel donc on obtient $x = 2\|x\|/r \cdot y \in V$.

Dans tous les cas on a bien $x \in V$, ce qui prouve $E \subset V$ et donc $V = E$.

c. Plus généralement, si on suppose $\mathring{V} \neq \emptyset$, prouver que $V = E$.

Si $\mathring{V} \neq \emptyset$, on peut se donner $x \in \mathring{V}$ et il existe $r > 0$ tel que $B(x, r) \subset V$. L'ensemble V étant un sous-espace vectoriel et puisque $x \in \mathring{V} \subset V$, l'ensemble $\left\{y - x,\ y \in B(x, r)\right\} = B(0, r)$ est encore inclus dans V. Cela prouve que $0 \in \mathring{V}$ et la question précédente permet de conclure.

Exercice 11 ••• *Distance à une partie non vide*

Soit A une partie non vide d'un espace vectoriel normé E. On notera d la distance associée à la norme de E. Pour $x \in \mathrm{E}$, on appelle *distance de x à* A la quantité :

$$d(x,\mathrm{A}) = \inf_{a\in \mathrm{A}} d(x,a)$$

1. Montrer que l'application $x \in \mathrm{E} \mapsto d(x,\mathrm{A}) \in \mathbb{R}$ est $1-$lipschitzienne et donc continue.
On pourra commencer par montrer que $d(x,\mathrm{A}) - d(y,\mathrm{A}) \leqslant d(x,y)$.

On fixe $(x,y) \in \mathrm{A}^2$. On se donne $a \in \mathrm{A}$. On a alors par inégalité triangulaire $d(x,a) \leqslant d(x,y)+d(y,a)$. La borne inférieure étant un minorant, on obtient $d(x,\mathrm{A}) \leqslant d(x,y)+d(y,a)$. Cela donne que $d(x,\mathrm{A})-d(x,y)$ est un minorant de tous les $d(y,a)$ pour $a \in \mathrm{A}$, ce qui implique, par définition de la borne inférieure, que $d(x,\mathrm{A})-d(x,y) \leqslant d(y,\mathrm{A})$. Finalement on a bien prouvé $d(x,\mathrm{A}) - d(y,\mathrm{A}) \leqslant d(x,y)$. Par symétrie des rôles de x et y et de la distance, on a aussi $d(y,\mathrm{A}) - d(x,\mathrm{A}) \leqslant d(x,y)$. En combinant ces deux informations, on trouve que $|d(x,\mathrm{A}) - d(y,\mathrm{A})| \leqslant d(x,y)$. La fonction définie est ainsi $1-$lipschitzienne et donc continue.

2. Soit $x \in \mathrm{E}$. Prouver que $d(x,\mathrm{A}) = 0$ si et seulement si $x \in \overline{\mathrm{A}}$.

On procède par double-implication.

- Supposons $d(x,\mathrm{A}) = 0$. Par définition de la borne inférieure, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $a_n \in \mathrm{A}$ tel que $0 \leqslant d(x,a_n) \leqslant 1/n$. On vient ainsi de créer une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de A qui converge vers x puisque $d(x,a_n) \to 0$ par encadrement. Cela donne $x \in \overline{\mathrm{A}}$.
- Réciproquement, on suppose $x \in \overline{\mathrm{A}}$. Par caractérisation séquentielle, il existe une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de A qui converge vers x. On a alors $0 \leqslant d(x,\mathrm{A}) \leqslant d(x,a_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ puisque la borne inférieure est un minorant et que la distance est positive. Par passage à la limite, étant donné que $d(x,a_n) \to 0$ puisque $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers x, il vient bien $d(x,\mathrm{A}) = 0$.

3. Pour $\mathrm{R} > 0$ on pose $\mathrm{A(R)} = \{x \in \mathrm{E},\ d(x,\mathrm{A}) \leqslant \mathrm{R}\}$. Montrer que si A est convexe alors A(R) est convexe et fermé.

Prouvons la convexité. On se donne x et y dans A(R) et $\lambda \in [0,1]$. Prouvons que $\lambda x+(1-\lambda)y \in \mathrm{A(R)}$. On se donne $(a_1,a_2) \in \mathrm{A}^2$. Par convexité de A, $\lambda a_1 + (1-\lambda)a_2$ est dans A. Ainsi, par inégalité triangulaire, homogénéité de la norme et positivité de λ et $1-\lambda$:

$$\begin{aligned} d(\lambda x+(1-\lambda)y,\mathrm{A}) \leqslant d(\lambda x+(1-\lambda)y, \lambda a_1+(1-\lambda)a_2) &= \|\lambda x+(1-\lambda)y-(\lambda a_1+(1-\lambda)a_2)\| \\ &= \|\lambda(x-a_1)+(1-\lambda)(y-a_2)\| \\ &\leqslant \lambda\|x-a_1\|+(1-\lambda)\|y-a_2\| = \lambda d(x,a_1)+(1-\lambda)d(y,a_2) \end{aligned}$$

Ainsi, si on fixe a_2, le terme $d(\lambda x+(1-\lambda)y,\mathrm{A})-(1-\lambda)d(y,a_2)$ est un minorant des $\lambda d(x,a_1)$ pour $a_1 \in \mathrm{A}$. Par définition d'une borne inférieure, cela donne $d(\lambda x+(1-\lambda)y,\mathrm{A})-(1-\lambda)d(y,a_2) \leqslant \lambda d(x,\mathrm{A})$. En passant de la même façon à la borne inférieure sur les $a_2 \in \mathrm{A}$, on obtient :

$$d(\lambda x+(1-\lambda)y,\mathrm{A}) \leqslant \lambda d(x,\mathrm{A})+(1-\lambda)d(y,\mathrm{A}) \leqslant \lambda\mathrm{R}+(1-\lambda)\mathrm{R} = \mathrm{R}$$

où l'on a utilisé le fait que x et y sont dans A(R). Cela permet de conclure.

Prouvons que A(R) est fermé par caractérisation séquentielle. On se donne $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de A(R) qui converge vers $x \in \mathrm{E}$ et on va montrer que $x \in \mathrm{A(R)}$. La suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ étant à valeurs dans A(R), on a $d(x_n,\mathrm{A}) \leqslant \mathrm{R}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Par passage à la limite dans cette inégalité, en utilisant la caractérisation séquentielle de la continuité de l'application étudiée à la question **1** qui donne $d(x_n,\mathrm{A}) \to d(x,\mathrm{A})$ lorsque n tend vers $+\infty$, on obtient $d(x,\mathrm{A}) \leqslant \mathrm{R}$, c'est-à-dire $x \in \mathrm{A(R)}$.

Exercice 12

1. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Il suffit de prouver qu'il existe une suite $(M_p)_{p\in\mathbb{N}}$ de matrices diagonalisables qui converge vers M.

M est trigonalisable sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on peut donc écrire :

$$M = Q\underbrace{\begin{pmatrix} \lambda_1 & & * \\ & \ddots & \\ (0) & & \lambda_n \end{pmatrix}}_{=T}Q^{-1}$$

où $Q \in GL_n(\mathbb{C})$ et $(\lambda_1,\dots,\lambda_n)$ sont les vp de M.

On pose $T_p = \begin{pmatrix} \lambda_1+\frac{\alpha}{p} & & & * \\ & \lambda_2+\frac{2\alpha}{p} & & \\ & & \ddots & \\ (0) & & & \lambda_n+\frac{n\alpha}{p} \end{pmatrix}$ pour $p \geq 1$.

On va chercher α pour que les coefficients diagonaux de T_p soient distincts deux à deux (ainsi T_p sera diagonalisable).

On a, pour $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$ où $i \neq j$:

$$\lambda_i + \frac{i\alpha}{p} = \lambda_j + \frac{j\alpha}{p}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\alpha}{p}(i-j) = \lambda_j - \lambda_i$$

$$\Leftrightarrow \alpha = \frac{p(\lambda_j-\lambda_i)}{i-j}$$

$$\Rightarrow |\alpha| = p\frac{|\lambda_j-\lambda_i|}{|i-j|} \underset{p\geq 1}{\geq} \frac{|\lambda_j-\lambda_i|}{|i-j|}.$$

On se donne donc α tel que $|\alpha| < \min\limits_{\substack{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2 \\ i\neq j}} \frac{|\lambda_j-\lambda_i|}{|i-j|}$.

Cela assure que tous les $\left(\lambda_i + \frac{i\alpha}{p}\right)_{i\in[\![1,n]\!]}$ sont distincts 2 à 2, et ce quel que soit $p \geq 1$.

Comme T_p est triangulaire, son spectre est l'ensemble de ses coefficients diagonaux et ils sont distincts deux à deux par ce qui précède.

Par le cours T_p est diagonalisable.

Or, par passage à la limite coefficient par coefficient : $T_p \xrightarrow[p\to\infty]{} T$.

Enfin, par continuité de $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \mapsto \varphi A \varphi^{-1} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ (elle est linéaire), on a : $\varphi T_p \varphi^{-1} \xrightarrow[p\infty]{} \varphi T \varphi^{-1} = M$.

La suite $(\varphi T_p \varphi^{-1})_{p \in \mathbb{N}^*}$ est bien une suite de matrices diagonalisables qui converge vers M.

2.

- Soit M diagonalisable, on écrit $M = \varphi D \varphi^{-1}$ où $\varphi \in GL_n(\mathbb{C})$ et $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & \lambda_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

  On a facilement : $\chi_M(M) = \chi_M(\varphi D \varphi^{-1}) = \varphi \begin{pmatrix} \chi_M(\lambda_1) & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & \chi_M(\lambda_n) \end{pmatrix} \varphi^{-1}$ et comme les valeurs propres de M, les $(\lambda_i)_i$, sont racine de χ_M, on obtient bien $\chi_M(M) = \varphi \cdot 0 \cdot \varphi^{-1} = 0$.

- Soit maintenant $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ quelconque. Par la question 1., il existe une suite $(M_p)_p$ de matrices diagonalisables telle que $M_p \xrightarrow[p\infty]{} M$. Par le point précédent, on a :

$$\forall p \geqslant 0, \quad \chi_{M_p}(M_p) = 0 \qquad (*)$$

  Or $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \mapsto \chi_A \in \mathbb{C}_n[X]$ est C^0 (il y a continuité des applications coordonnées car elles sont polynomiales en les coeffs de A) et on peut vérifier qu'alors : $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \mapsto \chi_A(A) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est C^0.

  Par caractérisation séquentielle de cette continuité, il vient en passant à la limite sur $(*)$: $\chi_M(M) = 0$.

3. Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Supposons que A soit limite d'une suite de matrices diagonalisables $(A_p)_{p \in \mathbb{N}}$.

Soit ψ l'application qui à $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ associe le discriminant de χ_M. On a :

$$\forall M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad \psi(M) = (a+d)^2 - 4(ad - bc)$$

de sorte que ψ est C^0 puisque polynomiale.

Soit $p \geqslant 0$. A_p est diagonalisable donc χ_{A_p} est scindé sur $\mathbb{R}$, ce qui donne $\psi(A_p) \geqslant 0$.

Par caractérisation séquentielle de la C^0 de φ et par passage à la limite dans cette inégalité : $\varphi(A) \geqslant 0$.

Or $\varphi(A) = -4 < 0$: absurde.

Donc les matrices diagonalisables ne sont pas denses dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.