SUITES ET SÉRIES DE FONCTIONS

T.D. n°5

Exercice 1 ●○○ — *Suites de fonctions*

Dans chacun des cas suivants, étudier les convergences simple, uniforme de la suite de fonctions (f_n). Lorsqu'il n'y a pas convergence uniforme, on cherchera à restreindre l'intervalle d'étude pour en obtenir.

1. $\forall (n,x) \in \mathbb{N} \times [0,1], \quad f_n(x) = x^n(1-x)$
2. $\forall (n,x) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{R}, \quad f_n(x) = \dfrac{n+1}{x^2+n^2}$
3. $\forall (n,x) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{R}, \quad f_n(x) = \dfrac{x}{x^2+n^2}$
4. $\forall (n,x) \in \mathbb{N} \times \mathbb{R}_+, \quad f_n(x) = \dfrac{nx^3}{1+n^2x^2}$
5. $\forall (n,x) \in \mathbb{N} \times \mathbb{R}_+, \quad f_n(x) = n\sin(x)e^{-nx}$
6. $\forall (n,x) \in \mathbb{N} \times [0,1], \quad f_n(x) = (x(1-x))^n$

Exercice 2 ●●○ — *Convergence d'une suite de fonctions définie par récurrence*

On se donne $f_0 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction bornée et positive. On définit alors par récurrence une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions en posant :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad f_{n+1}(x) = \sqrt{1+f_n(x)}$$

1. Montrer que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers une fonction f que l'on déterminera.
2. Prouver que :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad |f_{n+1}(x) - f(x)| \leqslant \frac{1}{2}|f_n(x) - f(x)|$$
3. En déduire que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f.

Exercice 3 ●○○ — *Séries de fonctions*

Dans chacun des cas suivants, étudier les convergences simple, uniforme et normale de la série de fonctions $\sum u_n$.

1. $\forall (n,x) \in \mathbb{N} \times \mathbb{R}, \quad u_n(x) = \dfrac{\sin(nx)}{1+n^2}$
2. $\forall (n,x) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{R}_+, \quad u_n(x) = \dfrac{nx^2}{n^3+x^2}$
3. $\forall (n,x) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{R}_+, \quad u_n(x) = \dfrac{x}{n}e^{-n^2x^2}$
4. $\forall (n,x) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{R}_+, \quad u_n(x) = \dfrac{(-1)^n}{x^2+n}$

Exercice 4 ●○○ — *Étude d'une série de fonction*

Pour $n \geqslant 1$, on définit la fonction u_n sur $\mathbb{R}_+$ en posant :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad u_n(x) = (-1)^n \frac{x}{n^2+x^2}$$

1. Montrer que la série de fonctions $\sum u_n$ converge uniformément sur $\mathbb{R}_+$ mais pas normalement.
2. En notant S la somme de la série de fonctions sur $\mathbb{R}_+$, déterminer la limite de S en $+\infty$.
3. Prouver que S est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$.

Exercice 5 ●●○ *Étude d'une série de fonction*

Pour $x \in \mathbb{R}$ tel que la série converge, on pose :

$$S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-x\sqrt{n}}$$

1. Donner le domaine de définition D de S.
2. Étudier la continuité de S sur D.
3. Vérifier que la fonction S est décroissante sur D.
4. Prouver que :

$$\forall x \in D, \quad \frac{2}{x^2} \leqslant S(x) \leqslant \frac{2}{x^2} + 1$$

   On pourra faire une comparaison série – intégrale.

5. En déduire les limites de S au bord du domaine D.

Exercice 6 ●●○ *Étude d'une série de fonction*

Pour $x \in \mathbb{R}$ tel que la série converge, on pose :

$$S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2 + x^2}$$

1. Montrer que S est définie et continue sur $\mathbb{R}_+$.
2. Donner un équivalent de S en $+\infty$.

Exercice 7 ●●○ *Étude d'une série de fonction*

Pour $x \in \mathbb{R}$ tel que la série converge, on pose :

$$S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{nx+1}$$

1. Montrer que S est définie et continue sur $\mathbb{R}_+^*$.
2. Étudier la limite ℓ de S en $+\infty$.
3. Prouver que :

$$S(x) - \ell \underset{x \to +\infty}{\sim} \frac{1}{x} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n}$$

Exercice 8 ●●○ *Étude d'une série de fonction*

Pour $x \in \mathbb{R}$ tel que la série converge, on pose :

$$S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!(x+n)}$$

1. Justifier que S est définie et de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
2. Étudier les variations de S.
3. Donner les limites de S en 0^+ et en $+\infty$.
4. Établir que :

$$\forall x > 0, \quad xS(x) - S(x+1) = \frac{1}{e}$$

5. Donner un équivalent de S en 0^+ et en $+\infty$.

Exercice 9 ••• *Étude d'une série de fonction*

Pour $x \in \mathbb{R}$ tel que la série converge, on pose :

$$\mathrm{S}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (\operatorname{Arctan}(n+x) - \operatorname{Arctan}(n))$$

1. Montrer que S est définie et continue sur $\mathbb{R}_+$.
2. Déterminer la limite de S en $+\infty$.
3. Y a-t-il convergence uniforme de la série de fonctions définissant S au voisinage de $+\infty$?

Exercice 10 ••• *Étude d'une série de fonction*

Pour $n \geqslant 1$, on définit la fonction u_n sur $]\,0\,,\pi\,[$ en posant :

$$\forall x \in\,]\,0\,,\pi\,[, \quad u_n(x) = \frac{1}{n}\cos^n(x)\sin(nx)$$

1. Montrer que la série de fonctions $\sum u_n$ est définie et de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]\,0\,,\pi\,[$.
   On notera S la somme de cette série de fonctions.
2. Calculer S' et en déduire S sur $]\,0\,,\pi\,[$.

Exercice 11 ••• *Étude d'une série de fonction*

Pour $\gamma \in [\,0\,,1\,[$, on définit une suite de fonctions $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sur $\mathbb{R}_+$ en posant :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad u_0(x) = 1 \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall x \in \mathbb{R}_+, \quad u_{n+1}(x) = 1 + \int_0^x u_n(\gamma t)\,\mathrm{d}t$$

1. Montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad 0 \leqslant u_{n+1}(x) - u_n(x) \leqslant \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$$

2. En déduire la convergence simple de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sur $\mathbb{R}_+$.
3. Établir que la limite u de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une fonction dérivable vérifiant :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad u'(x) = u(\gamma x)$$