

T.D. N°5



EXERCICE 1 ••• Suites de fonctions

Dans chacun des cas suivants, étudier les convergences simple, uniforme de la suite de fonctions (f_n) . Lorsqu'il n'y a pas convergence uniforme, on cherchera à restreindre l'intervalle d'étude pour en obtenir.

1. $\forall (n, x) \in \mathbb{N} \times [0, 1], f_n(x) = x^n(1-x)$
2. $\forall (n, x) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{R}, f_n(x) = \frac{n+1}{x^2+n^2}$
3. $\forall (n, x) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{R}, f_n(x) = \frac{x}{x^2+n^2}$
4. $\forall (n, x) \in \mathbb{N} \times \mathbb{R}_+, f_n(x) = \frac{nx^3}{1+n^2x^2}$
5. $\forall (n, x) \in \mathbb{N} \times \mathbb{R}_+, f_n(x) = n \sin(x)e^{-nx}$
6. $\forall (n, x) \in \mathbb{N} \times [0, 1], f_n(x) = (x(1-x))^n$

EXERCICE 2 ••• Convergence d'une suite de fonctions définie par récurrence

On se donne $f_0 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction bornée et positive. On définit alors par récurrence une suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de fonctions en posant :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, f_{n+1}(x) = \sqrt{1 + f_n(x)}$$

1. Montrer que la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplement vers une fonction f que l'on déterminera.
2. Prouver que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, |f_{n+1}(x) - f(x)| \leq \frac{1}{2} |f_n(x) - f(x)|$$

3. En déduire que la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers f .

EXERCICE 3 ••• Séries de fonctions

Dans chacun des cas suivants, étudier les convergences simple, uniforme et normale de la série de fonctions $\sum u_n$.

1. $\forall (n, x) \in \mathbb{N} \times \mathbb{R}, u_n(x) = \frac{\sin(nx)}{1+n^2}$
2. $\forall (n, x) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{R}_+, u_n(x) = \frac{nx^2}{n^3+x^2}$
3. $\forall (n, x) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{R}_+, u_n(x) = \frac{x}{n} e^{-n^2x^2}$
4. $\forall (n, x) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{R}_+, u_n(x) = \frac{(-1)^n}{x^2+n}$

EXERCICE 4 ••• Étude d'une série de fonction

Pour $n \geq 1$, on définit la fonction u_n sur \mathbb{R}_+ en posant :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, u_n(x) = (-1)^n \frac{x}{n^2 + x^2}$$

1. Montrer que la série de fonctions $\sum u_n$ converge uniformément sur \mathbb{R}_+ mais pas normalement.
2. En notant S la somme de la série de fonctions sur \mathbb{R}_+ , déterminer la limite de S en $+\infty$.
3. Prouver que S est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}_+ .

EXERCICE 5 ●●○ Étude d'une série de fonction

Pour $x \in \mathbb{R}$ tel que la série converge, on pose :

$$S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-x\sqrt{n}}$$

1. Donner le domaine de définition D de S.
2. Étudier la continuité de S sur D.
3. Vérifier que la fonction S est décroissante sur D.
4. Prouver que :

$$\forall x \in D, \quad \frac{2}{x^2} \leq S(x) \leq \frac{2}{x^2} + 1$$

On pourra faire une comparaison série – intégrale.

5. En déduire les limites de S au bord du domaine D.

EXERCICE 6 ●●○ Étude d'une série de fonction

Pour $x \in \mathbb{R}$ tel que la série converge, on pose :

$$S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2 + x^2}$$

1. Montrer que S est définie et continue sur \mathbb{R}_+ .
2. Donner un équivalent de S en $+\infty$.

EXERCICE 7 ●●○ Étude d'une série de fonction

Pour $x \in \mathbb{R}$ tel que la série converge, on pose :

$$S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{nx + 1}$$

1. Montrer que S est définie et continue sur \mathbb{R}_+^* .
2. Étudier la limite ℓ de S en $+\infty$.
3. Prouver que :

$$S(x) - \ell \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{x} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n}$$

EXERCICE 8 ●●○ Étude d'une série de fonction

Pour $x \in \mathbb{R}$ tel que la série converge, on pose :

$$S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!(x+n)}$$

1. Justifier que S est définie et de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}_+^* .
2. Étudier les variations de S.
3. Donner les limites de S en 0^+ et en $+\infty$.
4. Établir que :

$$\forall x > 0, \quad xS(x) - S(x+1) = \frac{1}{e}$$

5. Donner un équivalent de S en 0^+ et en $+\infty$.

EXERCICE 9 ••• Étude d'une série de fonction

Pour $x \in \mathbb{R}$ tel que la série converge, on pose :

$$S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (\operatorname{Arctan}(n+x) - \operatorname{Arctan}(n))$$

1. Montrer que S est définie et continue sur \mathbb{R}_+ .
2. Déterminer la limite de S en $+\infty$.
3. Y a-t-il convergence uniforme de la série de fonctions définissant S au voisinage de $+\infty$?

EXERCICE 10 ••• Étude d'une série de fonction

Pour $n \geq 1$, on définit la fonction u_n sur $]0, \pi[$ en posant :

$$\forall x \in]0, \pi[, \quad u_n(x) = \frac{1}{n} \cos^n(x) \sin(nx)$$

1. Montrer que la série de fonctions $\sum u_n$ est définie et de classe \mathcal{C}^1 sur $]0, \pi[$.
On notera S la somme de cette série de fonctions.
2. Calculer S' et en déduire S sur $]0, \pi[$.

EXERCICE 11 ••• Étude d'une série de fonction

Pour $\gamma \in [0, 1[$, on définit une suite de fonctions $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sur \mathbb{R}_+ en posant :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad u_0(x) = 1 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall x \in \mathbb{R}_+, \quad u_{n+1}(x) = 1 + \int_0^x u_n(\gamma t) dt$$

1. Montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad 0 \leq u_{n+1}(x) - u_n(x) \leq \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$$

2. En déduire la convergence simple de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sur \mathbb{R}_+ .
3. Établir que la limite u de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une fonction dérivable vérifiant :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad u'(x) = u(\gamma x)$$