SUITES ET SÉRIES DE FONCTIONS

Quelques corrigés du T.D. n°5

Exercice 9 ••• *Étude d'une série de fonction*

Pour $x \in \mathbb{R}$ tel que la série converge, on pose :

$$\mathrm{S}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (\mathrm{Arctan}(n+x) - \mathrm{Arctan}(n))$$

1. Montrer que S est définie et continue sur $\mathbb{R}_+$.

On utilise le théorème de continuité de la somme d'une série de fonctions.

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction $x \mapsto \mathrm{Arctan}(n+x) - \mathrm{Arctan}(n)$ est continue sur $\mathbb{R}_+$.
- Soient $x \geqslant 0$ et $n \geqslant 0$. Le théorème des accroissement finis appliqué à la fonction Arctan entre n et $n+x$ donne l'existence d'un $c \in \,]\,n, n+x\,[$ tel que :

$$\mathrm{Arctan}(n+x) - \mathrm{Arctan}(n) = \frac{x}{1+c^2} \leqslant \frac{x}{1+n^2}$$

On se donne $[\,a, b\,] \subset \mathbb{R}_+$, et on obtient alors :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall x \in [\,a, b\,], \quad |\mathrm{Arctan}(n+x) - \mathrm{Arctan}(n)| = \mathrm{Arctan}(n+x) - \mathrm{Arctan}(n) \leqslant \frac{x}{1+n^2} \leqslant \frac{b}{1+n^2}$$

où $b/(1+n^2)$ est le terme général d'une série convergente par comparaison avec une série de Riemann puisque $b/(1+n^2) \sim b/n^2$. On obtient ainsi la convergence normale et donc uniforme de la série de fonction définissant S sur tout segment de $\mathbb{R}_+$.

Ainsi le théorème s'applique et donne le résultat escompté.

2. Déterminer la limite de S en $+\infty$.

On utilise la relation $\mathrm{Arctan}(x) + \mathrm{Arctan}(1/x) = \pi/2$ pour $x > 0$. Le terme général de la série de fonction définissant S s'écrit alors :

$$\forall n \geqslant 1, \quad \forall x > 0, \quad u_n(x) = \mathrm{Arctan}\left(\frac{1}{n}\right) - \mathrm{Arctan}\left(\frac{1}{n+x}\right)$$

Les fonctions $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont toutes croissantes de sorte que S est croissante. Le théorème de la limite monotone donne que S admet une limite, finie ou infinie, en $+\infty$. Par l'absurde, on suppose que cette limite ℓ est finie. Par positivité, on a :

$$\forall \mathrm{N} \geqslant 1, \quad \forall x > 0, \quad \sum_{n=1}^{\mathrm{N}} u_n(x) \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x) = \mathrm{S}(x)$$

On passe à la limite lorsque x tend vers $+\infty$ pour obtenir :

$$\forall \mathrm{N} \geqslant 1, \quad \sum_{n=1}^{\mathrm{N}} \mathrm{Arctan}\left(\frac{1}{n}\right) \leqslant \ell$$

Mais la série numérique $\sum_{n\geqslant 1} \mathrm{Arctan}(1/n)$ est divergente puisque son terme général est équivalent au terme général $1/n$ de la série harmonique. Cette série étant à termes positifs, la suite de ses sommes partielles tend vers $+\infty$. En particulier, elle n'est pas majorée, ce qui contredit la la majoration précédente. On conclut que S tend vers $+\infty$ en $+\infty$.

3. Y a-t-il convergence uniforme de la série de fonctions définissant S au voisinage de $+\infty$?

S'il y avait convergence uniforme de $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ au voisinage de $+\infty$, le théorème de la double limite s'appliquerait et donnerait la convergence de la série $\sum_{n\geqslant 1} \lim_{x\to+\infty} u_n(x) = \sum_{n\geqslant 1} \operatorname{Arctan}(1/n)$, ce qui est absurde.

Exercice 10 ••• *Étude d'une série de fonction*

Pour $n \geqslant 1$, on définit la fonction u_n sur $]0,\pi[$ en posant :

$$\forall x \in]0,\pi[, \quad u_n(x) = \frac{1}{n}\cos^n(x)\sin(nx)$$

1. Montrer que la série de fonctions $\sum u_n$ est définie et de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0,\pi[$.
On notera S la somme de cette série de fonctions.

On utilise le théorème de dérivation de la somme d'une série de fonctions.

- Soit $x \in]0,\pi[$. On a, pour tout $n \geqslant 1$, $|u_n(x)| \leqslant |\cos(x)|^n$ avec $|\cos(x)| < 1$ d'où la convergence de $\sum_{n\geqslant 1} u_n(x)$ par comparaison avec une série géométrique convergente. Ainsi $\sum_{n\geqslant 1} u_n$ converge simplement sur $]0,\pi[$.
- Les fonctions (u_n) sont $\mathscr{C}^1$ sur $]0,\pi[$ avec, pour $x \in]0,\pi[$ et $n \geqslant 1$, $u_n'(x) = \cos^{n-1}(x)\cos((n+1)x)$.
- Soit $[a,b] \subset]0,\pi[$, on a pour tout $x \in [a,b]$ et $n \geqslant 1$, $\left|u_n'(x)\right| \leqslant q^{n-1}$ où $q = \max(|\cos(a)|, |\cos(b)|)$ avec $\sum_{n\geqslant 1} q^{n-1}$ convergente puisque $\left|q\right| < 1$. On obtient la convergence normale et donc uniforme de $\sum_{n\geqslant 1} u_n'$ sur tout segment de $]0,\pi[$.

Par théorème de cours, S est $\mathscr{C}^1$ sur $]0,\pi[$.

2. Calculer S′ et en déduire S sur $]0,\pi[$.

S′ peut se calculer en la reliant à la partie réelle de la somme de la série géométrique de raison complexe $q = \cos(x)e^{ix}$. On trouve $S'(x) = -1$ pour $x \in]0,\pi[$. On en conclut que $S(x) = -x + C$ pour $x \in]0,\pi[$ avec une certaine constante C. On trouve $C = \pi/2$ en appliquant en $x = \pi/2$.

Exercice 11

1. On procède par récurrence sur $n \geq 0$.

Initialisation : Si $n = 0$, on a, pour $x \in \mathbb{R}^+$:

$$u_1(x) - u_0(x) = u_1(x) - 1 = \int_0^x u_0(\gamma t)\,dt = \int_0^x 1\,dt = x$$

et on a bien $0 \leq x \leq \dfrac{x^{0+1}}{(0+1)!}$

Hérédité : On suppose le résultat vrai au rang $n \geq 0$ et on le prouve au rang $n+1$. Pour $x \in \mathbb{R}^+$:

$$u_{n+2}(x) - u_{n+1}(x) = 1 + \int_0^x u_{n+1}(\gamma t)\,dt - 1 - \int_0^x u_n(\gamma t)\,dt$$

$$= \int_0^x \left(u_{n+1}(\gamma t) - u_n(\gamma t)\right) dt$$

- Par hypothèse de récurrence, pour $t \in [0,x]$, $u_{n+1}(\gamma t) - u_n(\gamma t) \geq 0$ donc $u_{n+2}(x) - u_{n+1}(x) \geq 0$ par positivité de l'intégrale.

- De plus :

$$u_{n+2}(x) - u_{n+1}(x) = \int_0^x \underbrace{\left(u_{n+1}(\gamma t) - u_n(\gamma t)\right)}_{\leq \frac{(\gamma t)^{n+1}}{(n+1)!} \text{ par } HR_n} dt \overset{\text{croissance de l'intégrale}}{\leq} \int_0^x \frac{(\gamma t)^{n+1}}{(n+1)!}\,dt$$

$$= \gamma^{n+1} \frac{x^{n+2}}{(n+2)!}$$

$$\overset{\gamma \leq 1}{\leq} \frac{x^{n+2}}{(n+2)!}$$

D'où le résultat.

2. On fixe $x \geq 0$. La série $\sum_{n \geq 0} \dfrac{x^{n+1}}{(n+1)!}$ étant convergente (série exponentielle), la question précédente combinée avec le thm de comparaison pour les séries à termes positifs donne que $\sum_{n \geq 0} (u_{n+1}(x) - u_n(x))$ converge. Grâce au lien suite - série, la suite $(u_n(x))_{n \geq 0}$ converge.

Ceci valant pour tout $x \geq 0$, cela donne la convergence simple de $(u_n)_{n\geq 0}$ sur $\mathbb{R}^+$. On note u la limite simple de $(u_n)_{n\geq 0}$.

3. Grâce au lien suite - série, on sait que :

$$\forall x \geq 0, \quad u(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (u_{n+1}(x) - u_n(x)) + u_0(x)$$

$$= 1 + \sum_{n=0}^{+\infty} \underbrace{(u_{n+1}(x) - u_n(x))}_{= v_n(x)} \qquad (R)$$

On va prouver que u est C^1 sur $\mathbb{R}^+$ en prouvant que $\sum_{n=0}^{+\infty} v_n$ l'est en utilisant le thm de classe $\mathcal{C}^1$ d'une somme de série de fonctions :

- Pour tout $n \geq 0$, v_n est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^+$ car toutes les fonctions $(u_n)_{n\geq 0}$ le sont. Ce dernier point se prouve par récurrence : $u_0 = 1$ est C^1 sur $\mathbb{R}^+$ et si u_n est C^1 sur $\mathbb{R}^+$, elle est en particulier C^0 sur $\mathbb{R}^+$ donc $x \longmapsto \int_0^x u_n(\gamma t)\,dt$ est C^1 sur $\mathbb{R}^+$, ce qui donne u_{n+1} C^1 sur $\mathbb{R}^+$.

  On obtient alors en dérivant la relation de récurrence, pour $n \geq 0$:

  $$\forall x \geq 0, \quad u_{n+1}'(x) = u_n(\gamma x) \qquad (*)$$

- La série de fonctions $\sum_{n\geq 0} v_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}^+$ comme démontré à la question précédente.

- Grâce à $(*)$: $\forall x \geq 0$, $v_n'(x) = u_n(\gamma x) - u_{n-1}(\gamma x)$ pour $n \geq 1$ et $v_0'(x) = 1$. Pour $n \geq 1$ et $x \in [a,b] \subset \mathbb{R}^+$:

$$|v_n'(x)| = |u_n(\gamma x) - u_{n-1}(\gamma x)|$$
$$\overset{\Phi 1}{=} u_n(\gamma x) - u_{n-1}(\gamma x)$$
$$\overset{\Phi 1}{\leq} \gamma^n \frac{x^n}{n!} \leq \frac{(\gamma b)^n}{n!}$$

  et ce dernier terme est le terme général d'une série convergente.

  Ainsi $\sum_{n\geq 1} v_n'$ CN et donc CU sur tout segment de $\mathbb{R}^+$.

La thm s'applique, $u = 1 + \sum_{n=0}^{+\infty} v_n$ est C^1 sur $\mathbb{R}^+$ et :

$$\forall x \geq 0, \quad u'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} v_n'(x) = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} (u_n(\gamma x) - u_{n-1}(\gamma x)) \underset{(R)}{=} u(\gamma x)$$