Exercice 13

1. Soit (n, N) avec $n+1 \leq N$.

$$\sum_{k=n+1}^{N} u_k v_k = \sum_{k=n+1}^{N} (S_k - S_{k-1}) v_k = \sum_{k=n+1}^{N} S_k v_k - \sum_{k=n}^{N-1} S_k v_{k+1}$$

$$= \sum_{k=n+1}^{N-1} S_k (v_k - v_{k+1}) + S_N v_N - S_n v_{n+1}$$

$$= \sum_{k=n}^{N} S_k (v_k - v_{k+1}) + S_N v_{N+1} - S_n v_n .$$

2. On utilise le théorème de classe $\mathcal{C}^1$ d'une somme de série de fonctions :

- Les $u_n : x \longmapsto \dfrac{x^n \sin(nx)}{n}$ sont $\mathcal{C}^1$ sur $]-1,1[$.

- La série $\sum_{n \geq 1} u_n$ converge simplement sur $]-1,1[$ car, si $x \in]-1,1[$:

$$|u_n(x)| \leq |x|^n$$ terme général d'une série géométrique convergente.

d'où le résultat par comparaison et convergence absolue.

- Étudions $\sum_{n \geq 1} u_n' = \sum_{n \geq 1} \left(x^{n-1} \sin(nx) + x^n \cos(nx) \right)$.

Soit $[a,b] \subset]-1,1[$, on a :

$$\forall n \geq 1, \ \forall x \in [a,b], \quad |u_n'(x)| \leq 2 \max(|a|,|b|)^{n-1}$$

et ce terme est indépendant de x et est un terme général de série géométrique convergente $(\max(|a|,|b|) < 1)$.

On a donc la CN et donc CU sur tout segment de $]-1,1[$ de $\sum_{n \geq 1} u_n'$.

Le thm s'applique, f est C^1 sur $]-1,1[$ et si $x \in]-1,1[\setminus \{0\}$:

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\sin(nx) x^{n-1} + \cos(nx) x^n \right)$$

$$= \operatorname{Im}\left(\frac{1}{x} \sum_{n=1}^{+\infty} (x e^{ix})^n \right) + \operatorname{Re}\left(\sum_{n=1}^{+\infty} (x e^{ix})^n \right)$$

$$= \operatorname{Im}\left(\frac{1}{x} \frac{x e^{ix}}{1 - x e^{ix}} \right) + \operatorname{Re}\left(\frac{x e^{ix}}{1 - x e^{ix}} \right)$$

$$= \operatorname{Im}\left(e^{ix}\frac{1-xe^{-ix}}{|1-xe^{ix}|^2}\right) + \operatorname{Re}\left(\frac{xe^{ix}(1-xe^{-ix})}{|1-xe^{ix}|^2}\right)$$

$$= \frac{\sin x + x(\cos x - x)}{1-2x\cos x + x^2}$$

Si $x=0$, on a $f'(0)=0$, valeur qui est la même que pour l'expression ci-dessus en $x=0$.

3. Soit $\varphi : x \longmapsto \operatorname{Arctan}\left(\frac{x\sin x}{1-x\cos x}\right)$ définie sur $]-1,1[$.

φ est dérivable sur $]-1,1[$ et après calculs $\varphi' = f'$.

Ainsi, pour $x\in]-1,1[$, $f(x) = \varphi(x) + C$ avec C une constante.

Or $f(0) = \varphi(0) = 0$ donc $C=0$. Ainsi $f=\varphi$ comme souhaité.

4. Soit $x\in[-1,1]$. On fixe $n\in\mathbb{N}^*$ et $N\in\mathbb{N}$ tel que $n+1\leq N$.

$$\sum_{k=n+1}^{N} \underbrace{\frac{1}{k}}_{v_k} \underbrace{\sin(kx)x^k}_{u_k} \overset{\text{IPP}}{=} \sum_{k=n}^{N} S_k\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right) + \frac{S_N}{N+1} - \frac{S_n}{n}$$

où $S_n = \sum_{p=1}^{n} x^p \sin(px) = \operatorname{Im}\left(\sum_{p=1}^{n}(xe^{ix})^p\right)$

$$= \operatorname{Im}\left(\frac{1-x^ne^{inx}}{1-xe^{ix}}\right) = \operatorname{Im}\left(\frac{(1-x^ne^{inx})(1-xe^{-ix})}{|1-xe^{ix}|^2}\right)$$

$$= \frac{x\sin x - x^n\sin(nx) - x^{n+1}\sin((n-1)x)}{|1-xe^{ix}|^2}$$

En particulier, par inégalité triangulaire ($|\sin|\leq 1$ et $|x|\leq 1$) :

$|S_n| \leq \frac{3}{a} = M$ où $a = \min_{x\in[-1,1]} |1-xe^{ix}|^2 > 0$

(fct° c° sur $[-1,1]$ qui ne s'annule pas)

On a :

- $\left|\frac{S_N}{N+1}\right| \leq \frac{M}{N+1} \xrightarrow[N\infty]{} 0$
- $\left|S_k\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)\right| \leq M\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right) = \frac{M}{k(k+1)}$

terme général d'une série CVG car $\underset{k\infty}{\sim} M/k^2$

donc la série $\sum_{k\geq 1} S_k\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)$ CVG par comparaison.

Par passage à la limite $N \to \infty$ dans la relation ci-dessus, il vient :

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{x^k}{k}\sin(kx) = \sum_{k=n}^{+\infty} S_k\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right) - \frac{S_n}{n}$$

Donc : $$\left|\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{x^k}{k}\sin(kx)\right| \leqslant M\sum_{k=n}^{+\infty}\frac{1}{k(k+1)} + \frac{M}{n}$$ par inégalité triangulaire.

La quantité de droite ne dépend pas de x et tend vers 0 lorsque $n\to+\infty$ (reste d'une série CVG pour le 1er Terme) donc on a prouvé la CU de la série de fonctions définissant f sur $[-1,1]$.

5. Le résultat précédent et la continuité des u_n sur $[-1,1]$ donne par théorème de continuité d'une somme de série de fonctions la continuité de f sur $[-1,1]$. Ainsi par continuité en ± 1 :

- $$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(n)}{n} = f(1) = \lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} \text{Arctan}\left(\frac{x\sin x}{1-x\cos x}\right)$$
$$= \text{Arctan}\left(\frac{\sin 1}{1-\cos 1}\right)$$
$$= \text{Arctan}\left(\frac{2\cos\frac{1}{2}\sin\frac{1}{2}}{2\sin^2\frac{1}{2}}\right)$$
$$= \text{Arctan}\left(\frac{1}{\tan 1/2}\right)$$
$$= \frac{\pi}{2} - \text{Arctan}(\tan 1/2)$$
$$= \frac{\pi-1}{2}.$$

- $$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{\sin(n)}{n} = -f(-1) = -\lim_{x\to -1^+} f(x)$$
$$= -\lim_{x\to -1^+} \text{Arctan}\left(\frac{x\sin x}{1-x\cos x}\right)$$
$$= -\text{Arctan}\left(\frac{\sin 1}{1+\cos 1}\right) = \dots = \frac{-1}{2}.$$