SÉRIES ENTIÈRES

T.D. N°6

Exercice 1 ●○○ — *Étude de séries entières*

Déterminer le rayon de convergence des séries entières suivantes :

1. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{n^2+1}{n^3+2} z^n$
2. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \left(\sqrt{n+2}-\sqrt{n}\right) z^n$
3. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{2^n+n^2}{3^n-n^2} z^n$
4. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{\ln(n^2+1)}{\ln(n^3+1)} z^n$
5. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \left(\sqrt{n^2+n}-\sqrt[3]{n^3+n^2}\right) z^n$
6. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \left(\sqrt{n}\right)^{-n} z^n$
7. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \tan\left(\pi\sqrt{n^2+1}\right) z^n$
8. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \ln(n!) z^n$
9. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{\operatorname{ch} n}{\operatorname{sh}^2 n} z^{2n}$

Exercice 2 ●○○ — *Étude de séries entières et calculs de sommes*

Déterminer le rayon de convergence des séries entières suivantes et en calculer la somme :

1. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{(n+1)^2}{n} x^n$
2. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{n+1}{n!} z^n$
3. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} n^{(-1)^n} x^n$
4. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{x^n}{n(n+2)}$
5. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} \frac{n+(-1)^{n+1}}{n+(-1)^n} x^n$
6. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{x^{4n+1}}{(4n+1)!}$
7. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{n+1}{(n+2)n!} z^n$
8. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \cos(n) x^n$
9. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{x^n}{(2n)!}$

Exercice 3 ●○○ — *Développements en série entière*

Dans chaque cas, développer en série entière la fonction f en 0 et donner le rayon de convergence associé :

1. $f(x) = \dfrac{1}{x^4-3x^2+2}$
2. $f(x) = (1-x)\ln(1-x)$
3. $f(x) = \dfrac{\sin(4x)}{\sin(x)}$
4. $f(x) = \ln\left(1+x+x^2\right)$
5. $f(x) = \dfrac{1}{x^2-x+2}$
6. $f(x) = \operatorname{Arctan}(1+x)$

Exercice 4 ●○○ — *Une identité binomiale*

Soit $p \in \mathbb{N}$. Établir que :

$$\forall x \in \,]-1,1[, \quad \frac{1}{(1-x)^{p+1}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{n+p}{n} x^n$$

Exercice 5 ●○○ — *Classe $\mathscr{C}^\infty$ d'une fonction*

On définit une fonction f sur $\mathbb{R}$ en posant :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Prouver que f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 6 ●●○ — *Développement en série entière d'une fonction*

On définit une fonction f sur $]-1,1[$ en posant :

$$\forall x \in]-1,1[, \quad f(x) = \frac{\operatorname{Arcsin} x}{\sqrt{1-x^2}}$$

1. Justifier que f possède un développement en série entière.
2. Démontrer que f vérifie une équation différentielle linéaire d'ordre 1.
   En déduire son développement en série entière ; on donnera le rayon de convergence associé.
3. En déduire la valeur de :

$$\mathrm{S} = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{2n}{n}^{-1}$$

Exercice 7 ●●○ — *Développement en série entière d'une fonction*

On définit une fonction f sur $\mathbb{R}$ en posant :

$$\forall x \in]-1,1[, \quad f(x) = \int_0^{\pi} \operatorname{ch}(x\cos t)\,\mathrm{d}t$$

1. On introduit, pour $p \in \mathbb{N}$, les intégrales :

$$\mathrm{J}_{2p} = \int_0^{\pi} \cos^{2p}(t)\,\mathrm{d}t \qquad \text{et} \qquad \mathrm{I}_{2p} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2p}(t)\,\mathrm{d}t$$

   a. Prouver que $\mathrm{J}_{2p} = 2\mathrm{I}_{2p}$ pour $p \in \mathbb{N}$.
   b. Démontrer que :

$$\forall p \in \mathbb{N}, \quad \mathrm{I}_{2p+2} = \frac{2p+1}{2p+2}\mathrm{I}_{2p}$$

   c. En déduire l'expression de J_{2p} en fonction de $p \in \mathbb{N}$.

2. Prouver que f est développable en série entière et donner le rayon de convergence associé.

Exercice 8 ●●○ — *Calcul d'une somme*

On pose, pour tout réel x où la série converge :

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \binom{2n}{n} \frac{x^n}{2n-1}$$

1. Donner le rayon de convergence de la série entière associée à f.
2. Démontrer que f est solution de l'équation différentielle :

$$(1+4x)y' - 2y = 0$$

3. En déduire f.

Exercice 9 ●●○ — *Calcul d'une somme*

On pose, pour tout réel x où la série converge :

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^n}{(n+1)(2n+1)}$$

1. Prouver que la série entière associée à la somme f est de rayon de convergence 1.

2. Exprimer $f(x)$ pour $x \in]-1,1[$.

3. Justifier que f est bien définie est continue sur $[-1,1]$.

4. En déduire la valeur de la somme :

$$S = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)(2n+1)}$$

Exercice 10 ●●○ *Étude d'une suite récurrente*

On souhaite déterminer l'expression de la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$a_0 = 1 \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N}, \quad a_{n+1} = \frac{a_n}{n+1} + \frac{(-1)^n}{(n+1)!}$$

1. Montrer que le rayon de convergence R de la série entière $\sum a_n x^n$ vérifie $R \geqslant 1$.
Dans la suite, on note S la somme de cette série entière.

2. Prouver que :

$$\forall x \in]-R,R[, \quad S'(x) = S(x) + e^{-x}$$

3. En déduire l'expression de a_n en fonction de $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 11 ●●○ *Nombres de Catalan*

On souhaite déterminer l'expression de la suite $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$c_0 = 1 \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N}, \quad c_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} c_k c_{n-k}$$

1. On suppose que la série entière $\sum c_n x^n$ est de rayon de convergence $R > 0$ et l'on note f sa somme.
Montrer qu'au voisinage de 0, la fonction f vérifie la relation $xf(x)^2 = f(x) - 1$.

2. Toujours sous l'hypothèse de la question précédente, prouver qu'au voisinage de 0 la fonction f est égale à la fonction g définie par :

$$g(x) = \frac{1}{2x}\left(1 - \sqrt{1-4x}\right)$$

3. Montrer que la fonction g est développable en série entière en 0 et donner son développement et le rayon de convergence associé.

4. En déduire que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad c_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$$

Exercice 12 ●●● *Équivalents de sommes de séries entières*

1. Déterminer les rayons de convergence des séries entières suivantes :

$$\sum_{n\geqslant 2} \ln(n) x^n, \qquad \sum_{n\geqslant 2} \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right) x^n \qquad \text{et} \qquad \sum_{n\geqslant 2} \frac{x^n}{n}$$

Dans la suite, on notera respectivement f, g et h les sommes de ces séries entières.

2. Montrer que g est définie et continue sur $[-1,1[$.

3. Pour $x \in]-1,1[$, déterminer une relation entre $(1-x)f(x)$ et $g(x)$.

4. Prouver que $g + h$ est continue sur $[0,1]$ et en déduire que $g(x) \sim \ln(1-x)$ au voisinage de 1^-.
En déduire un équivalent de $f(x)$ au voisinage de 1^-.