Exercice 12

1. On a : $\sup_{x\in[-1,1]} |a_n x^n| = |a_n|$ et $\sum_{n\geq 0} |a_n|$ CVG par hypothèse.
Ainsi $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ CN et donc CU sur $[-1,1]$. Les $(x\mapsto a_n x^n)_{n\geq 0}$ étant C^0 sur $[-1,1]$, S est continue sur $[-1,1]$ par théorème de continuité d'une somme de série de fonctions.

2. Par théorème de continuité d'une somme de série de fonctions, on obtient la C^0 de S sur $[0,1]$ et donc l'existence de $S(1)$ avec $S(1) = \lim_{t\to 1^-} S(t)$ par C^0 en 1 de S.

3. • On considère $S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n$.

Soit $x\in[0,1]$. La série précédente étant alternée avec la valeur absolue de son terme général qui est décroissante et de limite nulle, le théorème spécial des séries alternées donne la convergence de la série avec :

$$\left|\sum_{k=N+1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} x^k\right| \leq \left|\frac{(-1)^{N+2} x^{N+1}}{N+1}\right| \leq \underbrace{\frac{1}{N+1} \xrightarrow[N\infty]{} 0}_{\text{indép}^t \text{ de } x}$$

Ceci prouve la CU de la série de fonctions sur $[0,1]$.
Ainsi :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = S(1) \overset{Q2}{=} \lim_{t\to 1^-} S(t) \overset{\text{DSE usuel sur }]-1,1[}{=} \lim_{t\to 1^-} \ln(1+t) = \ln 2$$

• De façon similaire, avec $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}$, on trouve :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{\pi}{4}$$

4. a. Soit $x\in[0,1[$. On a :

$$S(1) - S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n - \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (1-x^n)$$

indication de l'énoncé et terme $n=0$ nul

$$= \sum_{n=1}^{+\infty} (R_{n-1}-R_n)(1-x^n)$$

$$= \sum_{n=1}^{+\infty} (R_{n-1}-R_n) - \sum_{n=1}^{+\infty} R_{n-1} x^n + \sum_{n=1}^{+\infty} R_n x^n$$

télescopage et $n \leftarrow n+1$ dans la 2ᵉ somme

$$= R_0 - \underbrace{\lim_{n\infty} R_n}_{\substack{=0 \text{ car} \\ \text{la série } \sum_{n\geq 0} a_n \\ \text{converge}}} - \sum_{n=0}^{+\infty} R_n x^{n+1} + \sum_{n=1}^{+\infty} R_n x^n$$

$$= R_0 - R_0 x + \sum_{n=1}^{+\infty} R_n (x^n - x^{n+1})$$

$$= (1-x) \sum_{n=0}^{+\infty} R_n x^n$$

4. b.

- Puisque $\sum_{n\geq 0} a_n$ converge, le rayon de convergence de $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ est supérieur à 1 par le cours. Ainsi S est continue sur $]-1,1[$ et donc sur $[0,1[$ par le cours.

- Reste à prouver la continuité en 1. On va prouver que $\lim_{x\to 1} S(x) = S(1)$. Soit $x \in [0,1[$. On fixe $\varepsilon > 0$.
Comme $\sum_{n\geq 0} a_n$ converge, $R_n \xrightarrow[n\infty]{} 0$ donc :
$\exists n_0, \ \forall n \geq n_0, \ |R_n| \leq \varepsilon$.
Avec la question précédente, par découpage et inégalité triangulaire, on en déduit :

$$|S(1) - S(x)| \leq (1-x) \sum_{n=0}^{n_0-1} |R_n| x^n + (1-x) \sum_{n=n_0}^{+\infty} \varepsilon \cdot x^n$$

$$\leq (1-x) \sum_{n=0}^{n_0-1} |R_n| x^n + (1-x)\varepsilon \sum_{n=0}^{+\infty} x^n$$

$$= \underbrace{(1-x) \sum_{n=0}^{n_0-1} |R_n| x^n}_{= A_{n_0}(x)} + \varepsilon$$

Or $A_{n_0}(x) \xrightarrow[x \to 1]{} 0$ donc :

$$\exists \delta \in]0,1[, \quad x \in [1-\delta, 1[\implies |A_{n_0}(x)| \leqslant \varepsilon$$

Ainsi, pour le réel $\varepsilon > 0$ fixé au départ, on a trouvé un $\delta \in]0,1[$ tel que pour $x \in [1-\delta, 1[$, on a $|S(1) - S(x)| \leqslant 2\varepsilon$.
Cela donne $S(x) \xrightarrow[x \to 1]{} S(1)$ comme souhaité.

Finalement, S est continue sur $[0,1]$.