Lycée Descartes
Tours

INTÉGRATION

PSI
2025 – 2026

T.D. N°7

Exercice 1 ●○○ — *Études d'intégrales*

Dans chacun des cas suivants, étudier la convergence de l'intégrale :

1. $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(1+t)}{\sin t}\,\mathrm{d}t$
2. $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{\sin t}$
3. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 t}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$
4. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{ch}(t)}$
5. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{t\,\mathrm{d}t}{t^3-\sqrt{t}-1}$
6. $\displaystyle\int_1^{2} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t(2-t)}}$

Exercice 2 ●○○ — *Études et calculs d'intégrales*

Dans chacun des cas suivants, étudier la convergence de l'intégrale et calculer sa valeur en cas de convergence :

1. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(t+1)(t+2)}$
2. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^2)^2}$
3. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^2+2t+2}$
4. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln t}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$
5. $\displaystyle\int_0^{1} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t(1-t)}}$
6. $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$
7. $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t}\sin t\,\mathrm{d}t$
8. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \ln\left(1+\frac{1}{t^2}\right)\mathrm{d}t$
9. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \left(1-\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}\right)\mathrm{d}t$

Exercice 3 ●○○ — *Deux suites d'intégrales généralisées*

On définit deux suites d'intégrales généralisées en posant :

$$\forall n\in\mathbb{N},\quad \mathrm{I}_n=\int_0^{+\infty} t^n e^{-t}\,\mathrm{d}t \qquad \text{et} \qquad \forall n\in\mathbb{N}^*,\quad \mathrm{J}_n=\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{(1+t^2)^n}$$

1. Justifier que les intégrales I_n, $n\in\mathbb{N}$, et J_n, $n\in\mathbb{N}^*$, sont convergentes.
2. Déterminer des relations de récurrence d'ordre 1 pour les suites $(\mathrm{I}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\mathrm{J}_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.
3. En déduire la valeur des intégrales I_n pour $n\in\mathbb{N}$ et J_n pour $n\in\mathbb{N}^*$.

Exercice 4 ●●○ — *Fonction définie par une intégrale généralisée*

On définit une fonction f sur $\mathbb{R}_+$ en posant, sous réserve de convergence de l'intégrale :

$$\forall x\in\mathbb{R}_+,\quad f(x)=\int_{\sqrt{x}}^{+\infty}\ln\left(\frac{t^2+2}{t^2+1}\right)\mathrm{d}t$$

1. Justifier que f est bien définie et continue sur $\mathbb{R}_+$.
2. Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et calculer f' sur $\mathbb{R}_+^*$.
3. Étudier la dérivabilité de f en 0.

Exercice 5 ●●○ — *Calcul d'une intégrale*

Pour $a>0$ et $b>0$ deux réels strictement positifs, on considère l'intégrale I suivante :

$$\mathrm{I}=\int_0^{+\infty}\frac{e^{-at}-e^{-bt}}{t}\,\mathrm{d}t$$

1. Justifier que l'intégrale I est convergente.

2. Prouver que la limite suivante existe et donner sa valeur :

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{a\varepsilon}^{b\varepsilon}\frac{e^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t$$

3. En déduire la valeur de I.
On pourra couper en 0 *dans l'intégrale* I *et la séparer en deux intégrales.*

Exercice 6 ●○○ — *Calculs de limites*

Dans chacun des cas suivants, justifier que les intégrales $(\mathrm{I}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont convergentes et déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty}\mathrm{I}_n$.

1. $\mathrm{I}_n=\displaystyle\int_0^1\ln(\cos(t^n))\,\mathrm{d}t$

2. $\mathrm{I}_n=\displaystyle\int_0^{+\infty}e^{-t}(\cos t)^{2n}\,\mathrm{d}t$

3. $\mathrm{I}_n=\displaystyle\int_0^{n}\left(1-\frac{t}{n}\right)^n\cos t\,\mathrm{d}t$
Indication : prouver $\ln(1+u)\leqslant u$ *pour* $u>-1$.

4. $\mathrm{I}_n=\displaystyle\int_0^{+\infty}\mathrm{Arctan}(nt)e^{-t^n}\,\mathrm{d}t$

5. $\mathrm{I}_n=\displaystyle\int_0^1\sin(t^n)\,\mathrm{d}t$

6. $\displaystyle\int_0^1\frac{1+nt}{(1+t)^n}\,\mathrm{d}t$
Indication : prouver $(1+u)^n\geqslant 1+nu$ *pour* $u\geqslant 0$.

Exercice 7 ●○○ — *Expression intégrale de* $\zeta(2)$

Démontrer l'égalité suivante :

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}=\int_0^1\frac{\ln t}{t-1}\,\mathrm{d}t$$

Exercice 8 ●●○ — *Expression intégrale d'une somme*

On se donne $p>0$ et $q>0$ deux réels strictement positifs.

1. Pour $x\in\,]-1,1[$, justifier la convergence de la série $\sum\limits_{n\geqslant 0}(-1)^n x^{nq}$ et donner sa somme.

2. Pour tout entier $n\in\mathbb{N}$, on définit :

$$\forall x\in[0,1[,\quad \mathrm{S}_n(x)=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k x^{kq}$$

En appliquant le théorème de convergence dominée à la suite $(\mathrm{S}_n)_{n\in\mathbb{N}}$, démontrer que :

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{nq+p}=\int_0^1\frac{x^{p-1}}{1+x^q}\,\mathrm{d}x$$

3. Était-il possible d'appliquer le théorème d'intégration terme à terme ?

Exercice 9 ●●○ — *Transformation intégrale – série*

On souhaite établir de deux façons différentes l'identité suivante :

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin t}{\mathrm{sh}\,t}\,\mathrm{d}t=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{2}{1+(2n+1)^2}$$

1. Démontrer le résultat souhaité par application du théorème d'intégration terme à terme.
Indication : on pourra utiliser l'inégalité $|\sin u|\leqslant|u|$ *pour* $u\in\mathbb{R}$.

2. Démontrer le résultat souhaité par application du théorème de convergence dominée.
Indication : on pourra au préalable montrer que :

$$\forall t > 0, \quad \frac{1}{\operatorname{sh} t} = \frac{2e^{-t}}{1 - e^{-2t}}$$

Exercice 10 ●●○ *La fonction Γ d'Euler*

On définit une fonction Γ en posant, sous réserve de convergence de l'intégrale :

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} \, \mathrm{d}t$$

1. Déterminer le domaine D de définition de Γ.
2. Prouver que, pour $x \in \mathrm{D}$, on a $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ et en déduire $\Gamma(n+1)$ pour $n \in \mathbb{N}$.
3. Établir que Γ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur D et donner ses dérivées sous forme intégrale.
4. Donner un équivalent de Γ en 0^+.
5. Prouver qu'il existe $\alpha \in]1, 2[$ tel que $\Gamma'(\alpha) = 0$. En déduire les variations de Γ et la limite de Γ en $+\infty$.
6. Démontrer que :

$$\forall x > 1, \quad \Gamma(x) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x} = \int_0^{+\infty} \frac{t^{x-1}}{e^t - 1} \, \mathrm{d}t$$

Exercice 11 ●●○ *Étude d'une intégrale à paramètre*

On définit une fonction f en posant, sous réserve de convergence de l'intégrale :

$$\forall x \in]-1, +\infty[, \quad f(x) = \int_0^1 \frac{t^x - 1}{\ln t} \, \mathrm{d}t$$

1. Justifier que la fonction f est bien définie sur $]-1, +\infty[$.
2. Prouver que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]-1, +\infty[$ et calculer f'.
3. En déduire une expression de f.

Exercice 12 ●●○ *Calcul de l'intégrale de Gauss*

On définit deux fonctions g et h sur $\mathbb{R}_+$ en posant :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad g(x) = \int_0^1 \frac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2} \, \mathrm{d}t \qquad \text{et} \qquad h(x) = \int_0^x e^{-t^2} \, \mathrm{d}t$$

1. Montrer que g et h sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$ et calculer leurs dérivées.
2. Montrer que la fonction $g + h^2$ est constante et déterminer la valeur de cette constante.
3. Prouver que $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = 0$.
4. En déduire la valeur de l'intégrale *de Gauss* $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}$.

Exercice 13 ●●○ *Étude d'une intégrale à paramètre*

On définit une fonction g en posant, sous réserve de convergence de l'intégrale :

$$g(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt} \operatorname{sh} t}{t} \, \mathrm{d}t$$

1. Déterminer le domaine D de définition de g.
2. Prouver que g est de classe $\mathscr{C}^1$ sur D et calculer g'.
3. Déterminer la limite de la suite $(g(n))_{n \geqslant 2}$.
4. En déduire une expression de g.