

T.D. N°7



## EXERCICE 1 ••• Études d'intégrales

Dans chacun des cas suivants, étudier la convergence de l'intégrale :

- |   |  |   |
|---|--|---|
| 1. $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t + \cos t}{\sqrt{t^3+1}} dt$ | 4. $\int_1^e \frac{\ln t}{t-1} dt$     | 7. $\int_0^{+\infty} \ln(t)e^{-t} dt$                     |
| 2. $\int_0^{+\infty} \frac{\ln t}{\sqrt{t^3+1}} dt$           | 5. $\int_0^1 \frac{dt}{1-t^2}$         | 8. $\int_0^{+\infty} \frac{t}{e^t-1} dt$                  |
| 3. $\int_0^1 \frac{\ln t}{t^3+t^2} dt$                        | 6. $\int_0^1 \frac{dt}{(1-t)\sqrt{t}}$ | 9. $\int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+t)}{t^{\frac{3}{2}}} dt$ |

## EXERCICE 2 ••• Études et calculs d'intégrales

Dans chacun des cas suivants, étudier la convergence de l'intégrale et calculer sa valeur en cas de convergence :

- |  |  |   |
|--|--|---|
| 1. $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t(t+1)}$  | 3. $\int_0^{+\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{t^2}\right) dt$ | 5. $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\operatorname{ch} t}{\operatorname{ch} 2t} dt$ |
| 2. $\int_{-1}^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$ | 4. $\int_0^{+\infty} \frac{t^4}{t^{10}+1} dt$              | 6. $\int_0^{+\infty} e^{-t} \sin t dt$  |

## EXERCICE 3 ••• Calculs d'intégrales par récurrence

Grâce à des intégrations par parties, prouver l'existence et donner la valeur des intégrales définies par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, I_n = \int_0^{+\infty} t^n e^{-t} dt \quad \text{et} \quad J_n = \int_0^1 (t \ln t)^n dt$$

## EXERCICE 4 ••• Calculs d'intégrales généralisées

1. Par une intégration par parties, calculer :

$$\int_0^1 \frac{\ln t}{(t+1)^2} dt$$

2. Par mise sous forme canonique du dénominateur puis changement de variable, calculer :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{1+t+t^2}$$

3. Prouver l'existence de l'intégrale suivante puis la calculer avec le changement de variable  $t = 1/x$  :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\ln t}{t^2+1} dt$$

4. Pour  $\alpha > 0$  et  $\omega \in \mathbb{R}$ , calculer les intégrales :

$$\int_0^{+\infty} \cos(\omega t) e^{-\alpha t} dt \quad \text{et} \quad \int_0^{+\infty} \sin(\omega t) e^{-\alpha t} dt$$

## EXERCICE 5 ••• Équivalent d'une suite d'intégrales

Pour  $n \in \mathbb{N}$ , on pose, sous réserve d'existence :

$$I_n = \int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^n(1+t^2)}$$

1. Justifier que la suite  $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est bien définie.
2. À l'aide d'une intégration par parties, trouver un équivalent de  $I_n$  lorsque  $n$  tend vers  $+\infty$ .

---

**EXERCICE 6** ●●○ *Calculs d'intégrales*

---

On introduit les trois intégrales suivantes :

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{t^2 + 1}{t^4 + 1} dt, \quad J = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{t^4 + 1} \quad \text{et} \quad K = \int_0^{\pi/2} \sqrt{\tan t} dt$$

1. Par le changement de variable  $x = t - 1/t$ , prouver l'existence et donner la valeur de  $I$ .
2. En déduire les valeurs de  $J$  et  $K$ .

---

**EXERCICE 7** ●●○ *Calculs d'une intégrale*

---

Pour  $a \in \mathbb{R}$ , on pose :

$$I(a) = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{(1+t^2)(1+t^a)}$$

1. Donner les valeurs de  $a$  pour lesquelles l'intégrale  $I(a)$  est convergente.
2. Grâce au changement de variable  $u = 1/t$ , donner la valeur de  $I(a)$  pour  $a \in \mathbb{R}$ .

---

**EXERCICE 8** ●●○ *Calculs d'intégrales*

---

On introduit les deux intégrales suivantes :

$$I = \int_0^{\pi/2} \ln(\sin t) dt \quad \text{et} \quad J = \int_0^{\pi/2} \ln(\cos t) dt$$

1. Montrer que les deux intégrales  $I$  et  $J$  sont convergentes et qu'elles sont égales.
2. En étudiant  $I+J$ , déterminer leur valeur commune.

---

**EXERCICE 9** ●●● *Calcul d'une intégrale*

---

Pour  $a > 0$  et  $b > 0$  deux réels strictement positifs, on considère l'intégrale  $I$  suivante :

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-at} - e^{-bt}}{t} dt$$

1. Justifier que l'intégrale  $I$  est convergente.
2. Prouver que la limite suivante existe et donner sa valeur :

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{a\varepsilon}^{b\varepsilon} \frac{e^{-t}}{t} dt$$

3. En déduire la valeur de  $I$ .

---

**EXERCICE 10** ●●● *Une intégrale semi-convergente*

---

On s'intéresse à l'intégrale suivante :

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$$

1. Déterminer la limite lorsque  $n$  tend vers  $+\infty$  de la quantité :

$$I_n = \int_0^{n\pi} \left| \frac{\sin t}{t} \right| dt$$

L'intégrale  $I$  est-elle absolument convergente?

2. Établir la convergence de l'intégrale  $I$  tout en prouvant l'identité :

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos t}{t^2} dt$$

**EXERCICE 11** ●○○ *Calculs de limites*

Dans chacun des cas suivants, déterminer  $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n$ .

1.  $I_n = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-\frac{t}{n}}}{1+t^2} dt$

3.  $I_n = \int_1^{+\infty} e^{-t^n} dt$

5.  $I_n = \int_0^{+\infty} \frac{t^n}{t^{2n} + t^n + 1} dt$

2.  $I_n = \int_0^{+\infty} \frac{n}{nt^2 + e^t} dt$

4.  $I_n = \int_0^\pi \sqrt{\pi-t} \sin^n t dt$

6.  $I_n = \int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n dt$

**EXERCICE 12** ●○○ *Étude d'une intégrale à paramètre*

On définit une fonction  $f$  en posant, sous réserve de convergence de l'intégrale :

$$\forall x \geq 0, \quad f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{1+t^3} dt$$

- Justifier que la fonction  $f$  est bien définie et continue sur  $\mathbb{R}_+$ .
- Déterminer la limite de  $f$  en  $+\infty$ .

**EXERCICE 13** ●●○ *Une expression intégrale de  $\zeta(2)$*

Pour  $n \in \mathbb{N}$ , on pose, sous réserve de convergence de l'intégrale :

$$J_n = \int_0^1 \frac{t^{2n+1} \ln t}{t^2 - 1} dt$$

- Justifier l'existence des intégrales  $J_n$  pour  $n \in \mathbb{N}$ .
- Calculer, pour  $n \in \mathbb{N}$ , la différence  $J_n - J_{n+1}$ .
- En déduire l'identité :

$$\int_0^1 \frac{t \ln t}{t^2 - 1} dt = \frac{1}{4} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$$

**EXERCICE 14** ●●○ *Une identité série - intégrale*

Pour  $p \in \mathbb{N}^*$ , démontrer l'égalité suivante :

$$\int_0^{+\infty} \frac{t^p}{e^t - 1} dt = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{p!}{n^{p+1}}$$

**EXERCICE 15** ●●○ *Étude d'une intégrale à paramètre*

On définit une fonction  $f$  en posant, sous réserve de convergence de l'intégrale :

$$\forall x \geq 0, \quad f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+xt)}{1+t^2} dt$$

1. Justifier que la fonction  $f$  est bien définie et continue sur  $\mathbb{R}_+$ .
2. Prouver que  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}_+^*$  et exprimer  $f'$  à l'aide d'une intégrale.
3. Calculer  $f'$  en s'aidant de la relation suivante, que l'on démontrera :

$$\forall (t, x) \in \mathbb{R}_+^2, \quad \frac{t}{(1+xt)(1+t^2)} = \frac{1}{1+x^2} \left( \frac{x}{1+t^2} + \frac{t}{1+t^2} - \frac{x}{1+xt} \right)$$

### EXERCICE 16 ●●○ Calcul de l'intégrale de Gauss

On définit deux fonctions  $g$  et  $h$  sur  $\mathbb{R}_+$  en posant :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad g(x) = \int_0^1 \frac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2} dt \quad \text{et} \quad h(x) = \int_0^x e^{-t^2} dt$$

1. Montrer que  $g$  et  $h$  sont de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}_+$  et calculer leurs dérivées.
2. Montrer que la fonction  $g + h^2$  est constante et déterminer la valeur de cette constante.
3. Prouver que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0$ .
4. En déduire la valeur de l'intégrale de Gauss  $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt$ .

### EXERCICE 17 ●●○ Étude d'une intégrale à paramètre

On définit une fonction  $F$  en posant, sous réserve de convergence de l'intégrale :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F(x) = \int_0^{+\infty} \exp\left(-\left(t^2 + \frac{x^2}{t^2}\right)\right) dt$$

1. Justifier que la fonction  $F$  est bien définie et continue sur  $\mathbb{R}$ .
2. Prouver que  $F$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}_+^*$ .
3. Déterminer une équation différentielle linéaire d'ordre 1 vérifiée par  $F$  sur  $\mathbb{R}_+^*$ .
4. En déduire une expression simple de  $F$  sur  $\mathbb{R}$ .

### EXERCICE 18 ●●○ La fonction $\Gamma$ d'Euler

On définit une fonction  $\Gamma$  en posant, sous réserve de convergence de l'intégrale :

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$$

1. Déterminer l'ensemble  $D$  des réels  $x$  pour lesquels l'intégrale définissant  $\Gamma(x)$  est bien convergente.
2. Montrer que la fonction  $\Gamma$  est continue sur  $D$ .
3. Prouver que  $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$  pour  $x \in D$ .
4. Exprimer  $\Gamma(n)$  pour  $n \in \mathbb{N}^*$ .

### EXERCICE 19 ●●● Transformée de Laplace

On se donne  $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{C}$  une fonction continue et bornée. On appelle *transformée de Laplace* de  $f$  l'application  $\mathcal{L}(f)$  définie sur  $\mathbb{R}_+^*$  par :

$$\mathcal{L}(f)(x) = \int_0^{+\infty} f(t) e^{-xt} dt$$

1. Montrer que la fonction  $\mathcal{L}(f)$  est bien définie et continue sur  $\mathbb{R}_+^*$ .
2. Déterminer la limite de  $x\mathcal{L}(f)(x)$  quand  $x$  tend vers  $+\infty$ .
3. Si  $f$  admet une limite  $\lambda$  en  $+\infty$ , déterminer la limite de  $x\mathcal{L}(f)(x)$  lorsque  $x$  tend vers  $0^+$ .