Exercice 15

1. Théorème de continuité d'une intégrale à paramètre :

- $\forall t \geq 0$, $x \mapsto \dfrac{\ln(1+xt)}{1+t^2}$ est C^0 sur $\mathbb{R}^+$;
- $\forall x \geq 0$, $t \mapsto \dfrac{\ln(1+xt)}{1+t^2}$ est C^0_{pm} sur $\mathbb{R}^+$;
- $\forall x \in [a,b] \subset \mathbb{R}^+$, $\forall t \geq 0$:

$$\left| \frac{\ln(1+xt)}{1+t^2} \right| \leq \frac{\ln(1+bt)}{1+t^2} = \varphi(t)$$

et φ est C^0 sur $[0,+\infty[$ et intégrable sur $[0,+\infty[$ puisque, en $+\infty$, on a : $t^{3/2} \dfrac{\ln(1+bt)}{1+t^2} \xrightarrow[t\infty]{} 0$ par C.C. (critère de Riemann)

Le thm s'applique : f est C^0 sur $\mathbb{R}^+$.

2. Théorème de classe C^1 d'une intégrale à paramètre :

- $\forall t \geq 0$, $x \mapsto \dfrac{\ln(1+xt)}{1+t^2}$ est C^1 sur $\mathbb{R}^+_*$
- $\forall x > 0$, $t \mapsto \dfrac{\ln(1+xt)}{1+t^2}$ est C^0 et intégrable sur $[0,+\infty[$ (par critère de Riemann en $+\infty$, voir Q1)
- $\forall x > 0$, $t \mapsto \dfrac{t}{(1+t^2)(1+xt)}$ est C^0_{pm} sur $[0,+\infty[$
- $\forall x \in [a,b] \subset \mathbb{R}^+_*$, $\forall t \geq 0$:

$$\left| \frac{t}{(1+t^2)(1+xt)} \right| \leq \frac{t}{(1+t^2)(1+at)}$$

qui est C^0 sur $[0,+\infty[$ et intégrable sur $[0,+\infty[$ puisque, en $+\infty$: $\dfrac{t}{(1+t^2)(1+at)} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{at^2}$

Le thm s'applique, f est C^1 sur $\mathbb{R}^+_*$ et, pour $x > 0$:

$$f'(x) = \int_0^{+\infty} \frac{t}{(1+t^2)(1+xt)} \, dt$$

3. On utilise la relation de l'énoncé (que l'on peut justifier par passage au même dénominateur). On a donc, pour $x > 0$:

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2}\left(\int_0^{+\infty} \frac{x\,dt}{1+t^2} + \int_0^{+\infty}\left(\frac{t}{1+t^2} - \frac{x}{1+xt}\right)dt\right)$$

$$= \frac{1}{1+x^2}\left(\left[x\operatorname{Artan} t\right]_0^{+\infty} + \left[\frac{1}{2}\ln(1+t^2) - \ln(1+xt)\right]_0^{+\infty}\right)$$

$$= \frac{1}{1+x^2}\left(\frac{\pi x}{2} + \left[\ln\left(\frac{\sqrt{1+t^2}}{1+xt}\right)\right]_0^{+\infty}\right)$$

$$= \frac{1}{1+x^2}\left(\frac{\pi x}{2} + \ln\left(\frac{1}{x}\right)\right) = \frac{\pi x}{2(1+x^2)} - \frac{\ln x}{1+x^2}.$$

Exercice 14

DSE $\frac{1}{1-u}$ pour $u = e^{-t} \in]-1,1[$ i.e. $t>0$

$$\int_0^{+\infty} \frac{t^p}{e^t-1}\,dt = \int_0^{+\infty} t^p e^{-t}\cdot\frac{1}{1-e^{-t}}\,dt = \int_0^{+\infty} t^p e^{-t}\sum_{n=0}^{+\infty} e^{-nt}\,dt$$

$$= \int_0^{+\infty}\sum_{n=0}^{+\infty} \underbrace{t^p e^{-(n+1)t}}_{u_n(t)}\,dt$$

Thm d'intégration terme à terme :

- Les $(u_n)_{n\geq 0}$ sont C^0_{pm} et intégrables sur $]0,+\infty[$
  (C^0 en 0 et $t^2 u_n \xrightarrow[+\infty]{} 0$ par C.C.)
- $\sum u_n$ C.S. sur $\mathbb{R}_*^+$ vers $t \longmapsto \frac{t^p}{e^t-1}$ qui est C^0_{pm} sur $\mathbb{R}_*^+$
- Pour $n\geq 0$, $\int_0^{+\infty} |u_n| = \int_0^{+\infty} t^p e^{-(n+1)t}\,dt = \frac{p!}{(n+1)^{p+1}}$

  Calcul par IPP

  et $\sum_{n\geq 0} \frac{p!}{(n+1)^{p+1}} = p!\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^{p+1}}$

  est une série de Riemann convergente car $p+1>1$ $(p>0)$.

Le thm s'applique, il permet d'échanger somme et intégrale, et d'obtenir la relation souhaitée.

Exercice 19 ••• *Transformée de Laplace*

On se donne $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{C}$ une fonction continue et bornée. On appelle *transformée de Laplace* de f l'application $\mathscr{L}(f)$ définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par :

$$\mathscr{L}(f)(x) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-xt}\,\mathrm{d}t$$

1. Montrer que la fonction $\mathscr{L}(f)$ est bien définie et continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

   On utilise le théorème de continuité d'une intégrale à paramètre :

   - Pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, la fonction $x \mapsto f(t)e^{-xt}$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$;
   - Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, la fonction $t \mapsto f(t)e^{-xt}$ est continue par morceaux sur $\mathbb{R}_+$ puisque f est continue sur $\mathbb{R}_+$;
   - Pour tout $x \in [a,b] \subset \mathbb{R}_+^*$ et tout $t \in \mathbb{R}_+$, on a, puisque f est bornée par hypothèse :

     $$\left|f(t)e^{-xt}\right| \leqslant \|f\|_\infty e^{-at}$$

     qui est une fonction continue par morceaux, positive et intégrable sur $\mathbb{R}_+$ (intégrale de référence).

   Le théorème s'applique et prouve que $\mathscr{L}(f)$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

2. Déterminer la limite de $x\mathscr{L}(f)(x)$ quand x tend vers $+\infty$.

   Soit $x > 0$. Dans l'intégrale définissant $\mathscr{L}(f)(x)$, qui est convergente d'après la question précédente, on réalise le changement de variable $u = xt$ qui est de classe $\mathscr{C}^1$ et strictement croissant. On obtient :

   $$x\mathscr{L}(f)(x) = \int_0^{+\infty} f\left(\frac{u}{x}\right)e^{-u}\,\mathrm{d}u$$

   On utilise alors le théorème de convergence dominée à paramètre continu.

   - Pour tout $x > 0$, la fonction $u \mapsto f\left(\frac{u}{x}\right)e^{-u}$ est continue par morceaux sur $\mathbb{R}_+$. Quand $x \to +\infty$, elle converge simplement vers la fonction $u \mapsto f(0)e^{-u}$ (par continuité de f en 0) qui est elle-même continue par morceaux sur $\mathbb{R}_+$.
   - Pour tout $x > 0$ et tout $u \in \mathbb{R}_+$, on a :

     $$\left|f\left(\tfrac{u}{x}\right)e^{-u}\right| \leqslant \|f\|_\infty e^{-u}$$

     qui est une fonction continue par morceaux, positive et intégrable sur $\mathbb{R}_+$ (intégrale de référence).

   Le théorème s'applique et prouve que :

   $$\lim_{x\to+\infty} \mathscr{L}(f)(x) = \int_0^{+\infty} f(0)e^{-u}\,\mathrm{d}u = f(0)$$

3. Si f admet une limite λ en $+\infty$, déterminer la limite de $x\mathscr{L}(f)(x)$ lorsque x tend vers 0^+.

   On utilise exactement la même technique que la question précédente, on trouve $\lim\limits_{x\to 0^+} \mathscr{L}(f)(x) = \lambda$.