Exercice 13

1. On fixe $x \in \mathbb{R}$ et on étudie la convergence de l'intégrale $g(x)$:

- $t \longmapsto \dfrac{e^{-xt}\,\mathrm{sh}\,t}{t}$ est continue sur $]0, +\infty[$

- En 0 : $\dfrac{e^{-xt}\,\mathrm{sh}\,t}{t} \underset{0}{\sim} \dfrac{1 \cdot t}{t} = 1$; la fonction est intégrable en 0 car prolongeable par continuité en 0.

- En $+\infty$: $\dfrac{e^{-xt}\,\mathrm{sh}\,t}{t} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{e^{-xt}e^{t}}{2t} = \dfrac{e^{-t(x-1)}}{2t}$

  ▷ si $x > 1$, $t^2 \dfrac{e^{-t(x-1)}}{2t} \xrightarrow[t\infty]{} 0$ par croissance comparée

  d'où l'intégrabilité en $+\infty$ par critère de Riemann.

  ▷ si $x \leq 1$, $\dfrac{e^{-t(x-1)}}{2t} \geqslant \dfrac{1}{2t}$ et $t \mapsto \dfrac{1}{2t}$ n'étant pas intégrable en $+\infty$

  (Riemann avec $\alpha = 1$), la fonction ne l'est pas non plus par comparaison.

Finalement : $D =]1 ; +\infty[$

2. On utilise le théorème de classe $\mathcal{C}^1$ d'une intégrale à paramètre avec : $\forall x > 1, \forall t > 0, \quad f(t,x) = \dfrac{e^{-xt}\,\mathrm{sh}\,t}{t}$.

▷ si $t>0$, $x \longmapsto f(t,x)$ est $\mathcal{C}^1$ sur D avec :

$$\forall x > 1, \quad \frac{\partial f}{\partial x}(t,x) = -e^{-xt}\,\mathrm{sh}\,t$$

▷ si $x > 1$, $t \longmapsto f(t,x)$ est intégrable sur $]0, +\infty[$ (Q1.)

▷ si $x>1$, $t \longmapsto \dfrac{\partial f}{\partial x}(t,x)$ est $\mathcal{C}^0_{pm}$ sur $]0, +\infty[$.

▷ si $x \in [a,b] \subset]1, +\infty[$ et $t > 0$, on a :

$$\left| \frac{\partial f}{\partial x}(t,x) \right| = \left| -e^{-xt}\,\mathrm{sh}\,t \right| \leq e^{-at}\,\mathrm{sh}\,t = \varphi(t)$$

et φ est C^0 sur $[0,+\infty[$ et intégrable sur $]0,+\infty[$

car continue en 0 et $t^2\varphi(t) \xrightarrow[t\infty]{} 0$ par croissance

comparée (critère de Riemann) puisque :

$$t^2\varphi(t) \underset{t\infty}{\sim} t^2 e^{-at}\frac{e^t}{2} = \frac{t^2}{2}e^{-t(a-1)} \quad \text{et } a-1>0 \text{ car } a>1.$$

Ainsi le théorème s'applique, g est C^1 sur D et :

$$\forall x>1, \quad g'(x) = -\int_0^{+\infty} e^{-xt}\,\mathrm{sh}\,t\,dt$$

3. On a, pour $n\geq 2$, $g(n) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \underbrace{e^{-nt}\frac{\mathrm{sh}\,t}{t}}_{f_n(t)}\,dt$.

Pour déterminer la limite de $g(n)$, on utilise le théorème de convergence dominée :

▷ Les fonctions $(f_n)_{n\geq 2}$ sont C^0_{pm} sur $]0,+\infty[$.

On a $f_n \xrightarrow[n\infty]{C.S.} 0$ qui est C^0_{pm} sur $]0,+\infty[$.

▷ Si $n\geq 2$ et $t>0$:

$$\left|f_n(t)\right| = \left|e^{-nt}\frac{\mathrm{sh}\,t}{t}\right| = e^{-nt}\frac{\mathrm{sh}\,t}{t} \leq e^{-2t}\frac{\mathrm{sh}\,t}{t} = \varphi(t)$$

et φ est C^0_{pm} et intégrable sur $]0,+\infty[$ (Q1. avec $x=2>1$)

Le théorème s'applique et donne $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} g(n) = \int_0^{+\infty} 0 = 0.$

4. Soit $x>1$. On a :

$$g'(x) = -\int_0^{+\infty} e^{-xt}\,\mathrm{sh}\,t\,dt = -\frac{1}{2}\int_0^{+\infty} e^{t(1-x)}\,dt + \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} e^{-t(1+x)}\,dt$$

$$= -\frac{1}{2}\left[\frac{e^{t(1-x)}}{1-x}\right]_0^{+\infty} + \frac{1}{2}\left[-\frac{e^{-t(1+x)}}{1+x}\right]_0^{+\infty}$$

les crochets généralisés sont bien convergents

$$= -\frac{1}{2}\left(0-\frac{1}{1-x}\right) + \frac{1}{2}\left(-0+\frac{1}{1+x}\right)$$

$1-x>0$ $\qquad$ $1+x>0$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{-1}{x-1}+\frac{1}{1+x}\right)$$

En primitivant, il existe une constante réelle C telle que :

$$\forall x > 1, \quad g(x) = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right) + C$$

Mais $g(x) \xrightarrow[n\infty]{} 0$ par la Q3 et $g(x) \xrightarrow[n\infty]{} C$ avec l'expression ci-dessus ; donc $C = 0$.

Ainsi : $\forall x > 1, \quad g(x) = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$.