ESPACES PRÉHILBERTIENS

T.D. N°8

EXERCICE 1 ●○○ — *Une projection orthogonale de $\mathbb{R}^3$*

On considère p l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à la matrice :

$$A = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 5 & -2 & 1 \\ -2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

Prouver que p est une projection orthogonale et déterminer les sous-espaces F et G tels que p soit la projection orthogonale sur F parallèlement à G.

EXERCICE 2 ●○○ — *Distance et projection orthogonale dans $\mathbb{R}^4$*

On munit $\mathbb{R}^4$ de sa structure euclidienne canonique et on introduit les deux sous-espaces vectoriels :

$$F = \mathrm{Vect}((1,1,1,1),(0,2,0,3)) \quad \text{et} \quad G = \left\{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4,\ x - y - 2t = 0 \ \text{et}\ y + z - 2t = 0\right\}$$

1. Donner la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^4$ de la projection orthogonale sur F.
2. Calculer la distance de $u = (1,2,3,4)$ à G.

EXERCICE 3 ●○○ — *Calcul d'une distance dans $\mathbb{R}_2[X]$*

On munit $\mathbb{R}_2[X]$ du produit scalaire suivant :

$$\forall (P,Q) \in \mathbb{R}_2[X]^2, \quad (P \mid Q) = \int_{-1}^{1} P(t)Q(t)\,dt$$

1. Démontrer que l'on définit bien ainsi un produit scalaire sur $\mathbb{R}_2[X]$.
2. Appliquer le procédé de Gram-Schmidt à la base canonique de $(1, X, X^2)$ de $\mathbb{R}_2[X]$ pour ce produit scalaire.
3. Donner la distance de X^2 à $\mathbb{R}_1[X]$.

EXERCICE 4 ●●○ — *Distance et projection orthogonale dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$*

On munit $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ du produit scalaire suivant :

$$\forall M, N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \quad (M \mid N) = \mathrm{Tr}(M^T N)$$

1. Vérifier que l'on définit bien ainsi un produit scalaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
2. Dans cette question, on travaille dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et on introduit l'ensemble :

$$F = \left\{\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix},\ (a,b) \in \mathbb{R}^2\right\}$$

   a. Prouver que F est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Déterminer $F^\perp$ et en donner une base orthonormée.
   b. Calculer la projection orthogonale de la matrice $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ sur $F^\perp$.

3. On note $J \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ la matrice dont tous les coefficients sont égaux à 1. Si $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, déterminer :

$$\inf_{(a,b)\in\mathbb{R}^2} \|M - aI_n - bJ\|$$

Exercice 5 ●●○ *Calcul d'un projeté orthogonal dans $\mathscr{C}^\infty([0,\pi],\mathbb{R})$*

Soit $E = \mathscr{C}^\infty([0,\pi],\mathbb{R})$ l'espace des fonctions de classe $\mathscr{C}^\infty$ définies sur $[0,\pi]$ et à valeurs réelles. On définit alors :

$$\forall f,g \in E, \quad (f \mid g) = \int_0^\pi f(t)g(t)\,\mathrm{d}t$$

1. Prouver que l'on définit bien ainsi un produit scalaire sur E.
2. Si $G = \{f \in E,\ f'' + f = 0\}$, déterminer le projeté orthogonal de la fonction $f : t \in [0,\pi] \mapsto t \in \mathbb{R}$ sur G.

Exercice 6 ●●○ *Calculs de bornes inférieures*

Déterminer la valeur de :

$$\inf_{(a,b)\in\mathbb{R}^2} \int_0^1 \left(\sqrt{t} - at - b\right)^2 \mathrm{d}t \qquad \text{et} \qquad \inf_{(a,b)\in\mathbb{R}^2} \int_0^{+\infty} \left(t^2 - at - b\right)^2 e^{-t}\,\mathrm{d}t$$

Exercice 7 ●○○ *Inégalités*

Pour $n \geqslant 1$, on se donne $(x_1,\dots,x_n) \in \mathbb{R}^n$.

1. Résoudre le système :

$$\begin{cases} x_1 + \cdots + x_n = n \\ x_1^2 + \cdots + x_n^2 = n \end{cases}$$

2. On suppose que $(x_1,\dots,x_n) \in (\mathbb{R}_+^*)^n$ et que $x_1 + \cdots + x_n = 1$. Montrer que :

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{x_k} \geqslant n^2$$

Étudier le cas d'égalité.

Exercice 8 ●●● *Distance et projection orthogonale dans $\mathscr{C}^1([0,1],\mathbb{R})$*

Soit $E = \mathscr{C}^1([0,1],\mathbb{R})$ l'espace des fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ définies sur $[0,1]$ et à valeurs réelles. On définit alors :

$$\forall f,g \in E, \quad \left(f \mid g\right) = \int_0^1 f(t)g(t)\,\mathrm{d}t + \int_0^1 f'(t)g'(t)\,\mathrm{d}t$$

1. Vérifier que l'on définit bien ainsi un produit scalaire sur E.
2. Montrer que les deux sous-espaces vectoriels de E :

$$V = \{f \in E, f(0) = f(1) = 0\} \quad \text{et} \quad W = \{f \in E \cap \mathscr{C}^2([0,1],\mathbb{R}),\ f'' = f\}$$

sont supplémentaires et orthogonaux. Exprimer la projection orthogonale sur W.

3. Pour $(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$, on pose maintenant :

$$V_{\alpha,\beta} = \{f \in E,\ f(0) = \alpha \text{ et } f(1) = \beta\}$$

   a. Soit $f \in V_{\alpha,\beta}$. Déterminer la projection orthogonale h de f sur W.
   b. Justifier que :

$$\inf_{f\in V_{\alpha,\beta}} \int_0^1 \left(f(t)^2 + f'(t)^2\right) \mathrm{d}t = \|h\|^2$$

   Calculer cette quantité.