ESPACES PRÉHILBERTIENS

Quelques corrigés du T.D. n°8

Exercice 10 ••• *Un exemple où F et $F^\perp$ ne sont pas supplémentaires*

Soit E l'ensemble des suites réelles $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que la série $\sum u_n^2$ converge. On pose également :

$$\forall (u,v)\in E^2,\quad (u\,|\,v)=\sum_{n=0}^{+\infty} u_n v_n$$

1. Justifier que E est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ des suites réelles.

   On procède de façon similaire à la preuve de la **Proposition 19** du cours d'intégration.

2. Vérifier que $(\cdot\,|\,\cdot)$ est un produit scalaire sur E.

   La linéarité à gauche (ou à droite) et la symétrie sont claires. La positivité découle du fait que la somme d'une série à termes positifs convergente est positive. Le caractère défini provient du fait que la somme d'une série à termes positifs convergente est nulle si et seulement si son terme général est la suite nulle.

3. On note F le sous-ensemble de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ constitué des suites réelles nulles à partir d'un certain rang.
   Justifier que F est un sous-espace vectoriel de E, déterminer $F^\perp$ et étudier si l'on a $E=F\oplus F^\perp$.

   Le fait que F soit un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ se prouve par caractérisation des sous-espaces vectoriels et ne pose pas de difficulté.
   On détermine $F^\perp$. Pour $n\in\mathbb{N}$, on définit la suite $e^{(n)}$ qui a tous ses termes nuls sauf celui d'indice n qui vaut 1. Pour tout $n\in\mathbb{N}$, on a clairement $e^{(n)}\in F$. Soit maintenant $u\in F^\perp$. En particulier, on a $(u\,|\,e^{(n)})=0$ pour tout $n\in\mathbb{N}$. Après calcul, cela équivaut par définition des suites $(e^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ à $u_n=0$ pour tout $n\in\mathbb{N}$, c'est-à-dire à $u=0$. Ainsi $F^\perp\subset\{0\}$. L'inclusion réciproque étant évidente, on a $F^\perp=\{0\}$.
   Enfin, si on avait $E=F\oplus F^\perp$, cela donnerait $E=F$ avec le résultat précédent, ce qui est absurde puisqu'il existe des suites réelles qui ne sont pas nulles à partir d'un certain rang.

Exercice 11 ••• *Caractérisation des projecteurs orthogonaux*

Soit E un espace préhilbertien réel dont on note $(\cdot\,|\,\cdot)$ et $\|\cdot\|$ les produit scalaire et norme associés. Si $p\in\mathscr{L}(E)$ est un projecteur de E, démontrer que p est un projecteur orthogonal si et seulement si on a :

$$\forall x\in E,\quad \|p(x)\|\leqslant\|x\|$$

Notons que, p étant un projecteur, le cours assure que p est la projection sur $\operatorname{Im} p$ parallèlement à $\operatorname{Ker} p$ et que l'on a la décomposition en somme directe $E=\operatorname{Im} p\oplus\operatorname{Ker} p$. On procède alors par double implication.

On suppose que p est un projecteur orthogonal, c'est-à-dire que $\operatorname{Im} p$ et $\operatorname{Ker} p$ sont orthogonaux. Si $x\in E$, on écrit $x=u+v$ avec $u\in\operatorname{Im} p$ et $v\in\operatorname{Ker} p$. Par définition de p, on a $p(x)=u$. D'après la remarque précédente, on a aussi u et v orthogonaux. Le théorème de Pythagore assure alors $\|p(x)\|^2=\|u\|^2=\|u+v\|^2-\|v\|^2=\|x\|^2-\|v\|^2\leqslant\|x\|^2$. Cela donne bien $\|p(x)\|\leqslant\|x\|$ par passage à la racine carrée. Au passage, ce sens n'est rien d'autre que l'inégalité de Bessel.

Réciproquement, on suppose que $\|p(x)\|\leqslant\|x\|$ pour tout $x\in E$ et on va prouver que p est un projection orthogonale, ce qui revient à prouver que $\operatorname{Im} p$ et $\operatorname{Ker} p$ sont orthogonaux. Soient donc $u\in\operatorname{Im} p$ et $v\in\operatorname{Ker} p$. On fixe maintenant $t\in\mathbb{R}$. On a $p(u+tv)=p(u)=u$ par linéarité et définition de p. De plus, par un calcul classique, on peut obtenir facilement $\|u+tv\|^2=\|u\|^2+2t(u\,|\,v)+t^2\|v\|^2$. Comme $\|p(u+tv)\|\leqslant\|u+tv\|$ par hypothèse, il vient en passant au carré $\|u\|^2\leqslant\|u\|^2+2t(u\,|\,v)+t^2\|v\|^2$ soit $0\leqslant 2t(u\,|\,v)+t^2\|v\|^2$. Pour $t>0$, cela donne $0\leqslant 2(u\,|\,v)+t\|v\|^2$ puis $0\leqslant 2(u\,|\,v)$ en faisant tendre t vers 0^+. Pour $t<0$, on a $0\geqslant 2(u\,|\,v)+t\|v\|^2$ puis $0\geqslant 2(u\,|\,v)$ en faisant tendre t vers 0^-. En conclusion il vient $0\leqslant 2(u\,|\,v)\leqslant 0$ et donc $(u\,|\,v)=0$, ce que l'on souhaitait.

Exercice 12 ••• *Une relation pour être une base orthonormée*

Soit E un espace préhilbertien réel dont on note $(\cdot|\cdot)$ et $\|\cdot\|$ les produit scalaire et norme associés. On suppose qu'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ et une famille $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ de vecteurs de E vérifiant la propriété $(\mathscr{P})$ suivante :

$$\forall x \in \mathrm{E}, \quad \|x\|^2 = \sum_{i=1}^{n} (x \,|\, e_i)^2 \tag{$\mathscr{P}$}$$

On pose $\mathrm{F} = \mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_n)$ et on note A la matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ dont les coefficients sont les $((e_i \,|\, e_j))_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$.

1. Soit $u \in \mathrm{F}^\perp$, calculer $\|u\|^2$. En déduire que E est de dimension finie.

Comme u est orthogonal aux $(e_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$, il vient grâce à $(\mathscr{P})$ avec $x = u$ que $\|u\|^2 = 0$, c'est-à-dire que $u = 0$ par séparation de la norme. Ainsi $\mathrm{F}^\perp \subset \{0\}$. L'inclusion réciproque étant évidente, on a $\mathrm{F}^\perp = \{0\}$. Comme F est de dimension finie, le cours assure que $\mathrm{E} = \mathrm{F} \oplus \mathrm{F}^\perp = \mathrm{F} \oplus \{0\} = \mathrm{F}$. Ainsi $\mathrm{E} = \mathrm{F}$ est de dimension finie.

2. On suppose dans cette question uniquement que $\|e_i\| \geqslant 1$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$.
Montrer que $\mathscr{B}$ est une base orthonormée de E.

Soit $j \in [\![1, n]\!]$. La propriété $(\mathscr{P})$ donne :

$$\|e_j\|^2 = \sum_{i=1}^{n} (e_j \,|\, e_i)^2 = \sum_{i \neq j} (e_j \,|\, e_i)^2 + (e_j \,|\, e_j)^2 = \sum_{i \neq j} (e_j \,|\, e_i)^2 + \|e_j\|^4$$

Comme $\|e_j\| \geqslant 1$, on a $\|e_j\|^4 \geqslant \|e_j\|^2$, ce qui donne :

$$\|e_j\|^2 \geqslant \sum_{i \neq j} (e_j \,|\, e_i)^2 + \|e_j\|^2 \quad \Longleftrightarrow \quad 0 \geqslant \sum_{i \neq j} (e_j \,|\, e_i)^2$$

Comme la somme de droite est une somme de termes positifs, elle est positive. Étant également négative par ce qui précède, elle est nulle et tous ses termes sont donc nuls. On conclut que $(e_j \,|\, e_i) = 0$ pour tout $i \neq j$. Ainsi la famille $\mathscr{B}$ est orthogonale. Enfin, avec ce nouveau renseignement, la propriété $(\mathscr{P})$ écrite au début du raisonnement donne maintenant $\|e_j\|^2 = \|e_j\|^4$, et donc $\|e_j\| = 1$ par positive de la norme. En conclusion, la famille $\mathscr{B}$ est orthonormée.

3. On suppose dans cette question uniquement que la famille $\mathscr{B}$ est libre.

a. Montrer que $\mathscr{B}$ est une base de E.

La question **1** montre que $\mathrm{E} = \mathrm{F}$. Comme $\mathscr{B}$ est libre, F est de dimension n, ce qui donne que la dimension de E est n. Enfin, $\mathscr{B}$ est une famille libre composée de $n = \dim \mathrm{E}$ vecteurs, elle forme donc une base de E.

b. Démontrer que :

$$\forall (x, y) \in \mathrm{E}^2, \quad (x \,|\, y) = \sum_{k=1}^{n} (x \,|\, e_k)(y \,|\, e_k)$$

Pour x et y dans E, on utilise une formule de polarité pour écrire avec la propriété $(\mathscr{P})$ que :

$$(x \,|\, y) = \frac{1}{4}\|x+y\|^2 - \frac{1}{4}\|x-y\|^2 = \frac{1}{4}\sum_{i=1}^{n} (x+y \,|\, e_i)^2 - \frac{1}{4}\sum_{i=1}^{n} (x-y \,|\, e_i)^2$$

Par linéarité à gauche du produit scalaire et en développant les carrés, il vient :

$$(x \,|\, y) = \frac{1}{4}\sum_{i=1}^{n} \big[2(x \,|\, e_i)(y \,|\, e_i) - (-2(x \,|\, e_i)(y \,|\, e_i))\big] = \frac{1}{4}\sum_{i=1}^{n} 4(x \,|\, e_i)(y \,|\, e_i) = \sum_{i=1}^{n} (x \,|\, e_i)(y \,|\, e_i)$$

c. En déduire que $\mathrm{A}^2 = \mathrm{A}$.
Soit $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$. On a, par symétrie du produit scalaire et grâce à la relation précédente :

$$(\mathrm{A}^2)_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} \mathrm{A}_{i,k}\mathrm{A}_{k,j} = \sum_{k=1}^{n} (e_i \,|\, e_k)(e_k \,|\, e_j) = \sum_{k=1}^{n} (e_i \,|\, e_k)(e_j \,|\, e_k) = (e_i \,|\, e_j) = \mathrm{A}_{i,j}$$

On a bien prouvé que $\mathrm{A}^2 = \mathrm{A}$.

D. Soit a l'endomorphisme de E dont la matrice dans la base $\mathscr{B}$ est A. Déterminer $\operatorname{Ker} a$.

Soit $x \in \operatorname{Ker} a$. On note $(x_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ ses coordonnées dans la base $\mathscr{B}$. A étant la matrice de a dans la base $\mathscr{B}$, on a par définition :

$$\forall j \in [\![1\,,n]\!], \quad a(e_j) = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{A}_{i,j} e_i = \sum_{i=1}^{n} (e_i \,|\, e_j) e_i$$

On en déduit, avec la décomposition $x = \sum_{j=1}^{n} x_j e_j$ et par linéarité de a et bilinéarité du produit scalaire :

$$0 = u(x) = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} x_j (e_i \,|\, e_j) e_i = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_j (e_i \,|\, e_j) e_i = \sum_{i=1}^{n} (e_i \,|\, x) e_i$$

En identifiant, c'est-à-dire grâce à la liberté de la famille $\mathscr{B}$, il vient $(x \,|\, e_i) = 0$ pour tout $i \in [\![1\,,n]\!]$. Avec la relation $(\mathscr{P})$, on en déduit immédiatement $\|x\|^2 = 0$ et donc $x = 0$ par séparation de la norme. Ainsi $\operatorname{Ker} a = \{0\}$ et a est injectif.

E. Conclure que $\mathscr{B}$ est une base orthonormée de E.

On sait que $\mathrm{A}^2 = \mathrm{A}$ de sorte que la matrice A annule le polynôme $\mathrm{X}^2 - \mathrm{X} = \mathrm{X}(\mathrm{X}-1)$ qui est scindé à racines simples. D'une part cela donne que A est diagonalisable et d'autre part que $\operatorname{sp}(\mathrm{A}) \subset \{0, 1\}$. Mais d'après la question précédente $\operatorname{Ker} a = \mathrm{E}_0$ est réduit à $\{0\}$ donc 0 n'est pas valeur propre de A. Ainsi $\operatorname{sp}(\mathrm{A}) \subset \{1\}$ et on a égalité puisque, A étant diagonalisable, elle a au moins une valeur propre. Enfin, A est diagonalisable avec une unique valeur propre égale à 1, un résultat classique donne rapidement que $\mathrm{A} = \mathrm{I}_n$. Par définition de A, cela donne $(e_i \,|\, e_j) = \delta_{i,j}$ pour $(i, j) \in [\![1\,,n]\!]^2$ et donc que $\mathscr{B}$ est orthonormée.