ENDOMORPHISMES D'UN ESPACE EUCLIDIEN

T.D. n°9

Exercice 1 ●○○ — *Isométrie du plan*

Dans $\mathbb{R}^2$ muni de sa structure euclidienne orientée canonique, on considère u l'endomorphisme canoniquement associé à la matrice :

$$A = \frac{1}{13}\begin{pmatrix} 12 & 5 \\ 5 & -12 \end{pmatrix}$$

Reconnaître et donner les éléments caractéristiques de l'endomorphisme u du plan $\mathbb{R}^2$.

Exercice 2 ●○○ — *Isométries de l'espace*

Dans $\mathbb{R}^3$ muni de sa structure euclidienne orientée canonique, on considère respectivement u, v et w les endomorphismes canoniquement associés aux matrices :

$$A = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 1 & 8 & -4 \\ -4 & 4 & 7 \\ 8 & 1 & 4 \end{pmatrix}, \qquad B = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad C = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 2 & 3 & 6 \\ 3 & -6 & 2 \\ 6 & 2 & -3 \end{pmatrix}$$

Reconnaître et donner les éléments caractéristiques des endomorphismes u, v et w de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 3 ●○○ — *Matrices d'isométries de l'espace*

Dans chacun des cas suivants, donner la matrice de l'endomorphisme u dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$, ce dernier étant muni de sa structure euclidienne orientée canonique.

1. u est la symétrie orthogonale par rapport à la droite dirigée par $(1,2,2)$.
2. u est la rotation d'angle $\pi/2$ et d'axe dirigé par $(0,1,-1)$.
3. u est la rotation d'angle $2\pi/3$ et d'axe dirigé par $(1,1,1)$.

Exercice 4 ●○○ — *Diagonalisations dans une base orthonormée*

On munit $\mathbb{R}^3$ de sa structure euclidienne canonique.

1. On définit un endomorphisme u de $\mathbb{R}^3$ en posant $u((x,y,z)) = (x-z, y-z, -x-y+z)$ pour $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. Montrer que u est un endomorphisme symétrique. Justifier qu'il existe une base de $\mathbb{R}^3$ formée de vecteurs propres de u et en donner une.
2. Diagonaliser la matrice suivante dans une base orthonormée :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Exercice 5 — *Matrices symétriques positives*

n note $S_n^+(\mathbb{R})$ (resp. $S_n^{++}(\mathbb{R})$) l'ensemble des matrices symétriques de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant la propriété :

$$\forall X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}), \quad X^T S X \geqslant 0 \quad (\text{resp. } X^T S X > 0)$$

Ces matrices sont dites symétriques *positives* (resp. *définies positives*).

1. On se donne $S \in S_n(\mathbb{R})$ et on note $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ les valeurs propres de S comptées avec leur ordre de multiplicité.

   A. Prouver que $S \in S_n^+(\mathbb{R})$ si et seulement si $\lambda_i \geqslant 0$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$.
   B. Énoncer et prouver une caractérisation similaire pour les matrices de $S_n^{++}(\mathbb{R})$.
   C. Si $S \in S_n^{++}(\mathbb{R})$, montrer que S est inversible et que $S^{-1} \in S_n^{++}(\mathbb{R})$.

2. On se donne $S \in S_n^+(\mathbb{R})$ et on note toujours $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ les valeurs propres de S.

   A. Soit $D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$. Montrer qu'il existe une unique matrice diagonale Δ de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant $\Delta^2 = D$ et la déterminer.
   B. Si $N \in S_n^+(\mathbb{R})$ vérifie $N^2 = D$, montrer que $N = \Delta$.
   C. Justifier qu'il existe $P \in O_n(\mathbb{R})$ vérifiant $P^T SP = D$.
   En déduire qu'il existe une matrice $T \in S_n^+(\mathbb{R})$ telle que $T^2 = S$ et prouver qu'une telle matrice est unique.

3. Justifier qu'il existe une matrice $T \in S_3^+(\mathbb{R})$ vérifiant $T^2 = S$ et la déterminer si la matrice S est donnée par :

$$S = \begin{pmatrix} 7 & 2 & -2 \\ 2 & 4 & -1 \\ -2 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

EXERCICE 6 ●●○ *Contraintes matricielles*

1. On se donne $M \in S_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et on suppose qu'il existe $p \geqslant 1$ tel que $M^p = 0$. Prouver que $M = 0$.
2. Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant $M^T M = MM^T$. On suppose de plus qu'il existe $p \geqslant 1$ tel que $M^p = 0$. Prouver que $M = 0$.

EXERCICE 7 ●●○ *Endomorphisme symétrique*

On considère E un espace euclidien de dimension $n \geqslant 2$, a un vecteur unitaire de E et $k \in \mathbb{R}$ un réel. On définit une application f_k sur E en posant :

$$\forall x \in E, \quad f_k(x) = x + k(x \mid a)a$$

1. Montrer que f_k est un endomorphisme symétrique de E.
2. Déterminer $k \in \mathbb{R}$ pour que f_k soit un endomorphisme orthogonal de E. Déterminer alors la nature de f_k.
3. Étudier les éléments propres de f_k.

EXERCICE 8 ●●○ *Inégalités*

On se donne $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in O_n(\mathbb{R})$ une matrice orthogonale.

1. Prouver que :

$$\sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \left| a_{i,j} \right| \leqslant n\sqrt{n}$$

2. Établir l'inégalité :

$$\left| \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} a_{i,j} \right| \leqslant n$$