

## RÉVISIONS DE PREMIÈRE ANNÉE



### PLAN DU COURS

<b>I. LIMITES</b>	<b>2</b>
I. 1. Définitions . . . . .	2
I. 2. Limites à gauche et à droite . . . . .	3
I. 3. Opérations sur les limites . . . . .	4
I. 4. Limites et inégalités . . . . .	4
I. 5. Caractérisation séquentielle de la limite . . . . .	5
I. 6. Limite monotone . . . . .	5
I. 7. Extension aux fonctions complexes . . . . .	5
<b>II. CONTINUITÉ</b>	<b>6</b>
II. 1. Définition . . . . .	6
II. 2. Continuité à gauche et à droite . . . . .	6
II. 3. Opérations sur la continuité . . . . .	6
II. 4. Prolongement par continuité en un point . . . . .	7
II. 5. Caractérisation séquentielle de la continuité . . . . .	7
II. 6. Théorème des valeurs intermédiaires . . . . .	7
II. 7. Fonctions continues sur un segment . . . . .	7
II. 8. Théorème de la bijection . . . . .	7
II. 9. Extension aux fonctions complexes . . . . .	8
<b>III. DÉRIVABILITÉ</b>	<b>8</b>
III. 1. Définition . . . . .	8
III. 2. Dérivabilité à gauche et à droite . . . . .	9
III. 3. Opérations sur la dérivabilité . . . . .	9
III. 4. Extrema et dérivabilité . . . . .	10
III. 5. Théorèmes de Rolle et des accroissements finis . . . . .	10
III. 6. Monotonie et dérivabilité . . . . .	10
III. 7. Théorème de la limite de la dérivée . . . . .	11
III. 8. Dérivées d'ordre supérieur . . . . .	11
III. 9. Extension aux fonctions complexes . . . . .	12
<b>IV. ANALYSE ASYMPTOTIQUE</b>	<b>12</b>
IV. 1. Relations de comparaison . . . . .	12
IV. 2. Manipulation des équivalents . . . . .	13
IV. 3. Développements limités . . . . .	14
IV. 4. Lien entre régularité et développements limités . . . . .	14
IV. 5. Obtention de développements limités . . . . .	14
IV. 6. Applications des développements limités . . . . .	14

<b>V. INTÉGRATION SUR UN SEGMENT</b>	<b>15</b>
V. 1. Propriétés de l'intégrale . . . . .	15
V. 2. Sommes de Riemann . . . . .	15
V. 3. Primitives d'une fonction continue . . . . .	16
V. 4. Calcul d'intégrales . . . . .	16
V. 5. Formules de Taylor . . . . .	16
V. 6. Extension aux fonctions complexes . . . . .	17

L'ensemble de définition des fonctions considérées dans la suite sera soit une *partie*  $D$  *quelconque* de  $\mathbb{R}$  soit un *intervalle*  $I$  de  $\mathbb{R}$  non vide et non réduit à un point.

On rappelle que l'on appelle *intervalle de*  $\mathbb{R}$  toute partie  $I$  de  $\mathbb{R}$  telle que pour tout  $(x, y) \in I^2$  avec  $x \leq y$  l'on a  $[x, y] \subset I$ .

Dans la suite, on notera  $\overline{\mathbb{R}}$  l'ensemble  $\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$  sur lequel on a prolongé la relation d'ordre de  $\mathbb{R}$  ainsi que les opérations  $+$  et  $\times$  de  $\mathbb{R}$  lorsque cela est possible.

Pour rappel, les trois cas non définis sont «  $(+\infty) + (-\infty)$  », «  $0 \times (+\infty)$  » et «  $0 \times (-\infty)$  ».

**NOTION DE VOISINAGE** Si  $a \in \overline{\mathbb{R}}$ , on appelle *voisinage de*  $a$  :

- si  $a \in \mathbb{R}$ , tout intervalle de la forme  $]a - r, a + r[$  avec  $r > 0$ ;
- si  $a = -\infty$ , tout intervalle de la forme  $] -\infty, M[$  avec  $M \in \mathbb{R}$ ;
- si  $a = +\infty$ , tout intervalle de la forme  $] M, +\infty[$  avec  $M \in \mathbb{R}$ .

**NOTION DE POINT ADHÉRENT** Si  $D \subset \mathbb{R}$ , on dit que  $a \in \overline{\mathbb{R}}$  est *adhérent* à  $D$  si tout voisinage  $V_a$  de  $a$  vérifie  $V_a \cap D \neq \emptyset$ .

Par exemple,  $0$  est adhérent à  $[0, 1]$ ,  $0$  est adhérent à  $]0, 1]$  et  $+\infty$  est adhérent à  $[1, +\infty[$ . En d'autres termes,  $a$  est adhérent à  $D$  s'il appartient à  $D$  ou s'il est « au bord de  $D$  ».

On notera  $\overline{D}$  l'ensemble des points adhérents à  $D$ , ce qui est cohérent avec la notation  $\overline{\mathbb{R}}$ .

**NOTION DE POINT INTÉRIEUR** Si  $D \subset \mathbb{R}$ , on dit que  $a \in D$  est un point *intérieur* à  $D$  s'il existe un voisinage  $V_a$  du point  $a$  tel que  $V_a \subset D$ .

Par exemple,  $1$  est intérieur à  $]0, 2]$  mais  $0$  et  $2$  ne le sont pas. En d'autres termes,  $a$  est un point intérieur à  $D$  s'il n'est pas « au bord de  $D$  ».

On notera  $\overset{\circ}{D}$  l'ensemble des points intérieurs à  $D$ .

**PROPRIÉTÉ VRAIE AU VOISINAGE D'UN POINT** On dira que  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  vérifie une propriété  $\mathcal{P}$  au voisinage de  $a \in \overline{D}$  s'il existe un voisinage  $V_a$  de  $a$  tel que  $\mathcal{P}$  soit vérifiée sur  $V_a \cap D$ .

## I. LIMITES

### I. 1. DÉFINITIONS

#### DÉFINITION 1 – Limite

Soient  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction,  $a \in \overline{D}$  un point adhérent à  $D$  et  $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$ .

#### Cas d'une limite finie

- Si  $\ell \in \mathbb{R}$  et  $a \in \mathbb{R}$ , on dit que  $f(x)$  tend vers  $\ell$  quand  $x$  tend vers  $a$  si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in D, |x - a| \leq \eta \implies |f(x) - \ell| \leq \varepsilon$$

- Si  $\ell \in \mathbb{R}$  et  $a = -\infty$ , on dit que  $f(x)$  tend vers  $\ell$  quand  $x$  tend vers  $-\infty$  si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists M \in \mathbb{R}, \forall x \in D, x \leq M \implies |f(x) - \ell| \leq \varepsilon$$

- Si  $\ell \in \mathbb{R}$  et  $a = +\infty$ , on dit que  $f(x)$  tend vers  $\ell$  quand  $x$  tend vers  $+\infty$  si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists M \in \mathbb{R}, \forall x \in D, x \geq M \implies |f(x) - \ell| \leq \varepsilon$$

### Cas d'une limite infinie

- Si  $\ell = +\infty$  et  $a \in \mathbb{R}$ , on dit que  $f(x)$  tend vers  $\ell$  quand  $x$  tend vers  $a$  si :

$$\forall M \in \mathbb{R}, \exists \eta > 0, \forall x \in D, |x - a| \leq \eta \implies f(x) \geq M$$

- Si  $\ell = +\infty$  et  $a = -\infty$ , on dit que  $f(x)$  tend vers  $\ell$  quand  $x$  tend vers  $-\infty$  si :

$$\forall M \in \mathbb{R}, \exists N \in \mathbb{R}, \forall x \in D, x \leq N \implies f(x) \geq M$$

- Si  $\ell = +\infty$  et  $a = +\infty$ , on dit que  $f(x)$  tend vers  $\ell$  quand  $x$  tend vers  $+\infty$  si :

$$\forall M \in \mathbb{R}, \exists N \in \mathbb{R}, \forall x \in D, x \geq N \implies f(x) \geq M$$

- Les définitions dans le cas  $\ell = -\infty$  se déduisent en travaillant sur  $-f$ .

**NOTATION** Dans le cas où  $f$  admet  $\ell$  pour limite en  $a$ , on utilisera les notations  $\ell = \lim_{x \rightarrow a} f(x)$  ou  $\ell = \lim_a f$  ou encore  $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} \ell$  ou  $f \xrightarrow{a} \ell$ .

**REMARQUE** – *Unicité de la limite*

Si  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  admet une limite en  $a \in \overline{D}$  alors cette limite est unique.

### PROPOSITION 1 – Limite finie et caractère localement borné

Soient  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction et  $a \in \overline{D}$  un point adhérent à  $D$ .

Si  $f$  admet une limite finie en  $a$  alors  $f$  est bornée au voisinage de  $a$ .

## I. 2. LIMITES À GAUCHE ET À DROITE

### DÉFINITION 2 – Limite à gauche et à droite

Soient  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction,  $a \in \overline{D}$  un point adhérent à  $D$  et  $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$ . On suppose que  $f$  est définie à gauche et à droite au voisinage de  $a$ .

- On dit que  $f$  admet  $\ell$  pour limite à gauche en  $a$  si  $f|_{]D \cap ]-\infty, a[}$  admet  $\ell$  pour limite en  $a$ .
- On dit que  $f$  admet  $\ell$  pour limite à droite en  $a$  si  $f|_{]D \cap ]a, +\infty[}$  admet  $\ell$  pour limite en  $a$ .

**NOTATION** Dans le cas où  $f$  admet  $\ell$  pour limite à gauche (resp. à droite) au point  $a$ , on utilisera les notations  $\ell = \lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$  ou  $\ell = \lim_a^- f$  (resp.  $\ell = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$  ou  $\ell = \lim_a^+ f$ ).

### PROPOSITION 2 – Lien entre limite et limites à gauche et à droite

Soient  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction,  $a \in \overline{D}$  un point adhérent à  $D$  et  $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$ . On suppose que  $f$  est définie à gauche et à droite au voisinage de  $a$ .

- Si  $a \in D$ , alors  $\lim_a f = \ell$  si et seulement si  $\lim_a^- f = \lim_a^+ f = \ell$  et  $\ell = f(a)$ .
- Si  $a \notin D$ , alors  $\lim_a f = \ell$  si et seulement si  $\lim_a^- f = \lim_a^+ f = \ell$ .

**EXEMPLE** La fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = 0$  si  $x \neq 0$  et  $f(0) = 1$  vérifie  $\lim_0^- f = \lim_0^+ f = 0 \neq f(0)$ .

De fait,  $f$  n'admet pas de limite en 0.

### I. 3. OPÉRATIONS SUR LES LIMITES

Soient  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  et  $g : D \rightarrow \mathbb{R}$  deux fonctions,  $a \in \overline{D}$ ,  $(\ell, \ell') \in \overline{\mathbb{R}}^2$  et  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

■ **Combinaison linéaire**

Si  $\lim_a f = \ell$  et  $\lim_a g = \ell'$  alors  $\lim_a (\lambda f + g) = \lambda \ell + \ell'$ .

■ **Produit**

Si  $\lim_a f = \ell$  et  $\lim_a g = \ell'$  alors  $\lim_a fg = \ell \ell'$ .

■ **Inverse**

Si  $f \neq 0$  sur  $D$  et  $\lim_a f = \ell$  alors :

si  $\ell \neq 0$ ,  $\lim_a \frac{1}{f} = \frac{1}{\ell}$  et si  $\ell = 0^+$  (resp.  $\ell = 0^-$ ),  $\lim_a \frac{1}{f} = +\infty$  (resp.  $-\infty$ ).

Soient  $f : D \rightarrow E$  et  $g : E \rightarrow \mathbb{R}$  deux fonctions,  $a \in \overline{D}$  et  $b \in \overline{E}$ .

■ **Composition**

Si  $\lim_a f = b$  et  $\lim_b g = \ell$  alors  $\lim_a (g \circ f) = \ell$ .

**REMARQUE** – *Forme indéterminée*

Dans le cas des opérations algébriques, le résultat n'est valable que si les opérations dans  $\overline{\mathbb{R}}$  qui apparaissent, à savoir  $\lambda \ell + \ell'$ ,  $\ell \ell'$  ou  $1/\ell$  (avec la convention  $1/(+\infty) = 1/(-\infty) = 0$ ), ont un sens. Si ce n'est pas le cas, on parle alors de *forme indéterminée* et il faut approfondir l'étude de la limite.

Pour rappel, les cas problématiques sont «  $(+\infty) + (-\infty)$  », «  $0 \times (+\infty)$  » et «  $0 \times (-\infty)$  ».

### I. 4. LIMITES ET INÉGALITÉS

**PROPOSITION 3** – *Limite et signe*

Soient  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction,  $a \in \overline{D}$  un point adhérent à  $D$  et  $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$ . On suppose que  $\lim_a f = \ell$ .

Si  $\ell > 0$  ou  $\ell = +\infty$  alors  $f$  est strictement positive au voisinage de  $a$ .

**PROPOSITION 4** – *Passage à la limite dans une inégalité*

Soient  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  et  $g : D \rightarrow \mathbb{R}$  deux fonctions et  $a \in \overline{D}$  un point adhérent à  $D$ . On suppose que  $f$  et  $g$  admettent des limites finies en  $a$ .

Si  $f(x) \leq g(x)$  au voisinage de  $a$  alors  $\lim_a f \leq \lim_a g$ .

**REMARQUE** Cela ne fonctionne pas avec des inégalités strictes.

Par exemple,  $e^{-x} > 0$  pour tout  $x \in \mathbb{R}$  mais  $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = 0$ .

**PROPOSITION 5** – *Limite par encadrement*

Soient  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g : D \rightarrow \mathbb{R}$  et  $h : D \rightarrow \mathbb{R}$  trois fonctions,  $a \in \overline{D}$  un point adhérent à  $D$  et  $\ell \in \mathbb{R}$ .

Si  $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$  au voisinage de  $a$  et si  $\lim_a f = \lim_a h = \ell$  alors  $g$  admet une limite en  $a$  et  $\lim_a g = \ell$ .

**PROPOSITION 6** – *Limite par minoration ou majoration*

Soient  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g : D \rightarrow \mathbb{R}$  deux fonctions et  $a \in \overline{D}$  un point adhérent à  $D$ .

- Si  $f(x) \leq g(x)$  au voisinage de  $a$  et si  $\lim_a f = +\infty$  alors  $\lim_a g = +\infty$ .

- Si  $f(x) \leq g(x)$  au voisinage de  $a$  et si  $\lim_a g = -\infty$  alors  $\lim_a f = -\infty$ .

## I. 5. CARACTÉRISATION SÉQUENTIELLE DE LA LIMITE

### PROPOSITION 7 – Caractérisation séquentielle

Soient  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction,  $a \in \overline{D}$  un point adhérent à  $D$  et  $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$ .  
Les deux assertions suivantes sont équivalentes :

- (1)  $\lim_a f = \ell$
- (2) Pour toute suite  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  à valeurs dans  $D$  de limite  $a$ , la suite  $(f(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$  a pour limite  $\ell$ .

**EXEMPLE** La fonction  $\sin$  n'admet pas de limite en  $+\infty$  puisque :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sin(2n\pi) = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \sin\left(2n\pi + \frac{\pi}{2}\right) = 1$$

## I. 6. LIMITE MONOTONE

### THÉORÈME 1 – Théorème de la limite monotone

Soit  $f : ]a, b[ \rightarrow \mathbb{R}$  avec  $a \in \mathbb{R}$ ,  $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$  et  $a < b$  une fonction croissante.  
Alors  $f$  admet une limite dans  $\overline{\mathbb{R}}$  en  $b$ . Si  $f$  est majorée alors  $\lim_b f$  est finie et vaut  $\sup_{]a, b[} f$ , sinon  $\lim_b f = +\infty$ .

**REMARQUE** Des énoncés similaires peuvent être écrits dans le cas où l'intervalle de définition est de la forme  $]a, b]$  et/ou dans le cas où  $f$  est décroissante.

## I. 7. EXTENSION AUX FONCTIONS COMPLEXES

Il est possible d'étendre la notion de limite **finie** aux fonctions à valeurs dans  $\mathbb{C}$ . En effet, il suffit de reprendre les assertions pour le cas d'une limite finie de la **DÉFINITION 1** et de remplacer les valeurs absolues par des modules.

Les inégalités n'ayant pas de sens dans  $\mathbb{C}$ , on ne peut plus parler de limite infinie, de fonction majorée, minorée ou monotone. En revanche, il est possible de définir la notion de fonction complexe bornée : une fonction  $f : D \rightarrow \mathbb{C}$  est dite *bornée* s'il existe un réel  $K \geq 0$  tel que pour tout  $x \in D$  on a  $|f(x)| \leq K$ .

Ainsi, parmi les énoncés précédents, les **PROPOSITION 1**, **DÉFINITION 2**, **PROPOSITION 2**, les opérations sur les limites tant que  $\pm\infty$  n'apparaissent pas et la **PROPOSITION 7** restent valables dans le cas complexe. Les autres n'ont plus de sens car ils reposent sur la relation d'ordre de  $\mathbb{R}$ .

Enfin, l'étude de la limite d'une fonction complexe  $f$  peut se ramener à l'étude de la limite des deux fonctions réelles  $\operatorname{Re}(f)$  et  $\operatorname{Im}(f)$  comme le précise le résultat suivant.

### THÉORÈME 2 – Limite d'une fonction complexe et de ses parties réelle et imaginaire

Soient  $f : D \rightarrow \mathbb{C}$  une fonction,  $a \in \overline{D}$  un point adhérent à  $D$  et  $\ell \in \mathbb{C}$ .  
Les deux assertions suivantes sont équivalentes :

- (1)  $\lim_a f = \ell$
- (2)  $\lim_a \operatorname{Re}(f) = \operatorname{Re}(\ell)$  et  $\lim_a \operatorname{Im}(f) = \operatorname{Im}(\ell)$

## II. CONTINUITÉ

### II. 1. DÉFINITION

#### DÉFINITION 3 – Continuité

Soit  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction.

- Soit  $a \in D$ . On dit que  $f$  est continue en  $a$  si  $\lim_a f$  existe. Dans ce cas, on a nécessairement  $\lim_a f = f(a)$ . Ainsi,  $f$  est continue en  $a$  si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in D, |x - a| \leq \eta \implies |f(x) - f(a)| \leq \varepsilon$$

- On dit que  $f$  est continue sur  $D$  si elle est continue en tout point de  $D$ .

**NOTATION** On notera  $\mathcal{C}(D, \mathbb{R})$  l'ensemble des fonctions à valeurs réelles continues sur  $D$ .

### II. 2. CONTINUITÉ À GAUCHE ET À DROITE

#### DÉFINITION 4 – Continuité à gauche et à droite

Soient  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction et  $a \in D$ . On suppose que  $f$  est définie à gauche et à droite au voisinage de  $a$ .

- On dit que  $f$  est continue à gauche en  $a$  si  $f_{|D \cap ]-\infty, a]}$  est continue en  $a$ .
- On dit que  $f$  est continue à droite en  $a$  si  $f_{|D \cap ]a, +\infty]}$  est continue en  $a$ .

#### PROPOSITION 8 – Lien entre limite à gauche et à droite et continuité à gauche et à droite

Soient  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction et  $a \in D$ . On suppose que  $f$  est définie à gauche et à droite au voisinage de  $a$ . Alors :

- $f$  est continue à gauche en  $a$  si et seulement si  $\lim_a^- f = f(a)$ .
- $f$  est continue à droite en  $a$  si et seulement si  $\lim_a^+ f = f(a)$ .
- $f$  est continue en  $a$  si et seulement si  $\lim_a^- f = \lim_a^+ f = f(a)$ .

**EXEMPLE** La fonction partie entière  $[\cdot]$  est continue sur  $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$  mais seulement continue à droite en tout point de  $\mathbb{Z}$ . En effet, si  $n \in \mathbb{Z}$ ,  $\lim_{x \rightarrow n^-} [x] = n - 1 \neq n = [n]$  et  $\lim_{x \rightarrow n^+} [x] = n = [n]$ .

### II. 3. OPÉRATIONS SUR LA CONTINUITÉ

La notion de continuité reposant sur celle de limite finie, elle hérite des propriétés relatives aux opérations. Les résultats qui suivent sont indifféremment valables pour la continuité en un point ou sur une partie.

- **Combinaison linéaire**  
Toute combinaison linéaire de fonctions continues est continue.
- **Produit**  
Tout produit de fonctions continues est continue.
- **Quotient**  
Tout quotient de fonctions continues dont le dénominateur ne s'annule pas est continue.
- **Composition**  
Toute composée de fonctions continues est continue.

## II. 4. PROLONGEMENT PAR CONTINUITÉ EN UN POINT

### THÉORÈME 3 – Théorème de prolongement par continuité

Soient  $D \subset \mathbb{R}$  et  $a \in D$ . Soit  $f : D \setminus \{a\} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue.

Il existe une fonction  $\tilde{f} : D \rightarrow \mathbb{R}$  continue sur  $D$  prolongeant  $f$  sur  $D$  si et seulement si  $\lim_a f$  existe et est finie.

Dans ce cas, un tel prolongement est unique et vérifie  $\tilde{f}(a) = \lim_a f$ .

On l'appelle le prolongement par continuité de  $f$  en  $a$ .

**REMARQUE** Même si  $\tilde{f}$  et  $f$  sont en toute rigueur différentes ( $\tilde{f}$  est définie sur  $D$  et  $f$  sur  $D \setminus \{a\}$ ), il est courant de continuer à noter  $f$  le prolongement par continuité de  $f$  en  $a$ .

**EXEMPLE** La fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}^*$  par  $f(x) = \sin x/x$  est prolongeable par continuité en 0 en posant  $f(0) = 1$  puisque  $\lim_0 f = 1$ .

## II. 5. CARACTÉRISATION SÉQUENTIELLE DE LA CONTINUITÉ

### PROPOSITION 9 – Caractérisation séquentielle

Soient  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction et  $a \in D$ .

Les deux assertions suivantes sont équivalentes :

- (1)  $f$  est continue en  $a$ .
- (2) Pour toute suite  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  à valeurs dans  $D$  de limite  $a$ , la suite  $(f(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$  a pour limite  $f(a)$ .

**REMARQUE** Ce résultat n'est qu'une réécriture du résultat de caractérisation séquentielle de la limite.

## II. 6. THÉORÈME DES VALEURS INTERMÉDIAIRES

### THÉORÈME 4 – Théorème des valeurs intermédiaires

Soient  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue sur un intervalle  $I$  et  $(a, b) \in I^2$ .

Alors toutes les valeurs entre  $f(a)$  et  $f(b)$  sont atteintes par  $f$ .

## II. 7. FONCTIONS CONTINUES SUR UN SEGMENT

### THÉORÈME 5 – Fonction continue sur un segment

Toute fonction continue sur un segment est bornée et atteint ses bornes.

## II. 8. THÉORÈME DE LA BIJECTION

### THÉORÈME 6 – Théorème de la bijection

Soit  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction définie sur un intervalle  $I$ .

Si  $f$  est continue et strictement monotone sur  $I$  alors  $f$  est bijective de  $I$  sur  $J = f(I)$ .

Dans ce cas,  $f^{-1}$  est continue et strictement monotone de même sens de variation que  $f$  sur  $J$ .

**EXEMPLE** La fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = x^3 + x + 1$  est continue sur  $\mathbb{R}$  en tant que fonction polynomiale et strictement croissante sur  $\mathbb{R}$  puisque dérivable avec, pour tout réel  $x$ ,  $f'(x) = 3x^2 + 1 > 0$ .

Ainsi, par application du théorème de la bijection,  $f$  est bijective de  $\mathbb{R}$  sur  $f(\mathbb{R}) = \left] \lim_{-\infty} f, \lim_{+\infty} f \right[ = \mathbb{R}$ .

## II. 9. EXTENSION AUX FONCTIONS COMPLEXES

De façon similaire au cas des limites, il est possible d'étendre la notion de continuité aux fonctions à valeurs dans  $\mathbb{C}$  en prenant comme définition celle de la **DÉFINITION 3**.

Les **DÉFINITION 4**, **PROPOSITION 8**, les opérations sur la continuité, les **THÉORÈME 3** et **PROPOSITION 9** restent valables dans le cas complexe.

L'étude de la continuité d'une fonction complexe peut se ramener à l'étude de la continuité des deux fonctions réelles  $\operatorname{Re}(f)$  et  $\operatorname{Im}(f)$  comme le précise le résultat suivant.

**THÉORÈME 7** – Continuité d'une fonction complexe et de ses parties réelle et imaginaire

Soient  $f : D \rightarrow \mathbb{C}$  une fonction et  $a \in D$ .

Alors  $f$  est continue en  $a$  (resp. sur  $D$ ) si et seulement si  $\operatorname{Re}(f)$  et  $\operatorname{Im}(f)$  sont continues en  $a$  (resp. sur  $D$ ).

## III. DÉRIVABILITÉ

### III. 1. DÉFINITION

**DÉFINITION 5** – Dérivabilité

Soit  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction.

- Soit  $a \in D$ . On dit que  $f$  est dérivable en  $a$  si le taux d'accroissement  $\tau_a$  de  $f$  en  $a$  défini sur  $D \setminus \{a\}$  par :

$$\tau_a(x) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

admet une limite finie lorsque  $x$  tend vers  $a$ .

Le cas échéant, cette limite est alors appelée *nombre dérivé de  $f$  en  $a$*  et est notée  $f'(a)$ .

- On dit que  $f$  est dérivable sur  $D$  si elle est dérivable en tout point de  $D$ . Dans ce cas, la fonction  $x \mapsto f'(x)$  définie sur  $D$  est appelée la *dérivée de  $f$* .

**NOTATION** On notera  $\mathcal{D}(D, \mathbb{R})$  l'ensemble des fonctions à valeurs réelles dérivables sur  $D$ .

**REMARQUE** – Interprétation géométrique

Si  $f$  est dérivable en  $a$  alors la courbe représentative de  $f$  admet au point  $(a, f(a))$  une tangente d'équation :

$$y = f'(a)(x - a) + f(a)$$

Le nombre dérivé  $f'(a)$  est la pente de cette tangente et s'obtient par définition comme la limite quand  $x$  tend vers  $a$  des pentes  $\tau_a(x)$  des cordes reliant les points  $(a, f(a))$  et  $(x, f(x))$ .

**PROPOSITION 10** – Dérivabilité implique continuité

Soient  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction et  $a \in D$ .

Si  $f$  est dérivable en  $a$  alors  $f$  est continue en  $a$ .

**REMARQUE** La réciproque est fautive comme le montre l'exemple de la fonction  $x \mapsto |x|$  en 0.



### III. 2. DÉRIVABILITÉ À GAUCHE ET À DROITE

#### DÉFINITION 6 – Dérivabilité à gauche et à droite

Soient  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction et  $a \in D$ . On suppose que  $f$  est définie à gauche et à droite au voisinage de  $a$ .

- On dit que  $f$  est dérivable à gauche en  $a$  si  $f|_{D \cap ]-\infty, a]}$  est dérivable en  $a$ .
- On dit que  $f$  est dérivable à droite en  $a$  si  $f|_{D \cap [a, +\infty[}$  est dérivable en  $a$ .

**NOTATION** Dans le cas où  $f$  est dérivable à gauche (resp. à droite) au point  $a$ , on notera  $f'_g(a)$  (resp.  $f'_d(a)$ ) le nombre dérivé associé.

#### PROPOSITION 11 – Lien entre dérivabilité et dérivabilité à gauche et à droite

Soient  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction et  $a \in D$ . On suppose que  $f$  est définie à gauche et à droite au voisinage de  $a$ . Alors  $f$  est dérivable en  $a$  si et seulement si  $f$  est dérivable à gauche et à droite en  $a$  avec  $f'_g(a) = f'_d(a)$ . Dans ce cas, on a alors  $f'(a) = f'_g(a) = f'_d(a)$ .

### III. 3. OPÉRATIONS SUR LA DÉRIVABILITÉ

La notion de dérivabilité reposant sur celle de limite finie, elle hérite des propriétés relatives aux opérations. Les résultats qui suivent sont indifféremment valables pour la dérivabilité en un point ou sur une partie.

Soient  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  et  $g : D \rightarrow \mathbb{R}$  deux fonctions et  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

#### ■ Combinaison linéaire

Si  $f$  et  $g$  sont dérivables alors  $\lambda f + g$  est dérivable et :

$$(\lambda f + g)' = \lambda f' + g'$$

#### ■ Produit

Si  $f$  et  $g$  sont dérivables alors  $fg$  est dérivable et :

$$(fg)' = f'g + fg'$$

#### ■ Quotient

Si  $g \neq 0$  et si  $f$  et  $g$  sont dérivables alors  $\frac{f}{g}$  est dérivable et :

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$$

Soient  $f : D \rightarrow E$  et  $g : E \rightarrow \mathbb{R}$  deux fonctions.

#### ■ Composition

Si  $f$  et  $g$  sont dérivables alors  $g \circ f$  est dérivable et :

$$(g \circ f)' = f' \cdot (g' \circ f)$$

En ce qui concerne la dérivabilité d'une fonction réciproque, le résultat est le suivant.

#### THÉORÈME 8 – Dérivabilité d'une fonction réciproque

Soit  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction bijective d'un intervalle  $I$  sur  $J = f(I)$ .

Si  $f$  est dérivable sur  $I$  et si  $f'$  ne s'annule pas sur  $I$  alors  $f^{-1}$  est dérivable sur  $J$  et :

$$(f^{-1})' = \frac{1}{f' \circ f^{-1}}$$

### III. 4. EXTREMA ET DÉRIVABILITÉ

#### THÉORÈME 9 – Condition nécessaire pour un extremum local en un point intérieur

Soient  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction et  $a \in D$  un point intérieur à  $D$ .  
Si  $f$  est dérivable en  $a$  et possède un extremum local alors  $f'(a) = 0$ .

#### REMARQUES

- Le point  $a$  doit être intérieur à  $D$ . En effet, par exemple, la fonction dérivable  $f : x \in [0, 1] \mapsto x$  possède un extremum (global) en 1 malgré le fait que  $f'(1) \neq 0$ .
- La réciproque est fautive comme le montre l'exemple de la fonction dérivable  $f : x \in \mathbb{R} \mapsto x^3$  qui ne possède pas d'extremum local en 0 bien que  $f'(0) = 0$ .

### III. 5. THÉORÈMES DE ROLLE ET DES ACCROISSEMENTS FINIS

#### THÉORÈME 10 – Théorème de Rolle

Soit  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue sur  $[a, b]$  et dérivable sur  $]a, b[$  vérifiant  $f(a) = f(b)$ .  
Alors il existe un réel  $c \in ]a, b[$  tel que  $f'(c) = 0$ .

#### THÉORÈME 11 – Théorème des accroissements finis

Soit  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue sur  $[a, b]$  et dérivable sur  $]a, b[$ .  
Alors il existe un réel  $c \in ]a, b[$  tel que :

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$$

**REMARQUE** Géométriquement, cette identité traduit le fait que la tangente au graphe de  $f$  au point d'abscisse  $c$  est parallèle à la corde joignant les points d'abscisses  $a$  et  $b$ .

#### THÉORÈME 12 – Inégalité des accroissements finis

Soit  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue sur un intervalle  $I$  et dérivable sur  $\dot{I}$ .  
S'il existe  $K \geq 0$  tel que pour tout réel  $x \in \dot{I}$  on a  $|f'(x)| \leq K$  alors :

$$\forall (x, y) \in I^2, \quad |f(x) - f(y)| \leq K|x - y|$$

**REMARQUE** Autrement dit,  $f$  est  $K$ -lipschitzienne sur  $I$ .

### III. 6. MONOTONIE ET DÉRIVABILITÉ

#### THÉORÈME 13 – Lien entre monotonie et dérivabilité

Soit  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue sur un intervalle  $I$  et dérivable sur  $\dot{I}$ . Alors :

- $f$  est croissante sur  $I$  si et seulement si  $f' \geq 0$  sur  $\dot{I}$ .
- $f$  est constante sur  $I$  si et seulement si  $f' = 0$  sur  $\dot{I}$ .
- Si  $f' \geq 0$  sur  $\dot{I}$  et ne s'annule qu'en un nombre fini de points alors  $f$  est strictement croissante.

Des résultats analogues peuvent être énoncés pour les fonctions décroissantes.

**REMARQUE** Pour ce résultat, le fait que  $I$  soit un **intervalle** est crucial. Par exemple, la fonction inverse définie sur  $\mathbb{R}^*$  est dérivable et vérifie  $f' \leq 0$  sur  $\mathbb{R}^*$  sans être décroissante sur  $\mathbb{R}^*$ . En revanche, elle l'est sur  $\mathbb{R}_-$  et sur  $\mathbb{R}_+$  qui, eux, sont bien des intervalles.

### III. 7. THÉORÈME DE LA LIMITE DE LA DÉRIVÉE

#### THÉORÈME 14 – Théorème de la limite de la dérivée

Soit  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue sur un intervalle  $I$  et dérivable sur  $I \setminus \{a\}$  pour  $a \in I$ . Soit  $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$ . Si  $f'$ , définie sur  $I \setminus \{a\}$ , admet  $\ell$  pour limite en  $a$ , alors le taux d'accroissement de  $f$  en  $a$  défini sur  $I \setminus \{a\}$  :

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

admet  $\ell$  pour limite en  $a$ .

En particulier, si  $\ell$  est finie,  $f$  est donc dérivable en  $a$  avec  $f'(a) = \ell$ .

#### REMARQUES

- Dans le cas où  $\ell$  est finie, on a également que  $f'$  est continue en  $a$  puisque  $\lim_a f' = \ell = f'(a)$ .
- On se sert souvent de ce résultat sous la forme suivante : si  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  est continue sur  $I$  et de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $I \setminus \{a\}$  et si  $f'$  admet une limite finie  $\ell$  en  $a$  alors  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $I$  avec  $f'(a) = \ell$ .

### III. 8. DÉRIVÉES D'ORDRE SUPÉRIEUR

#### DÉFINITION 7 – Dérivée $n$ -ème

Soient  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction et  $n \in \mathbb{N}$ .

Par récurrence, on pose  $f^{(0)} = f$  et, si  $n \geq 1$ , on dit que  $f$  est  $n$  fois dérivable sur  $D$  si  $f^{(n-1)}$  est dérivable sur  $D$  et on note  $f^{(n)} = (f^{(n-1)})'$ .

**NOTATION** On notera  $\mathcal{D}^n(D, \mathbb{R})$  l'ensemble des fonctions à valeurs réelles  $n$  fois dérivables sur  $D$ .

#### DÉFINITION 8 – Classes $\mathcal{C}^n$ et $\mathcal{C}^\infty$

Soient  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction et  $n \in \mathbb{N}$ .

On dit que la fonction  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^n$  sur  $D$  lorsqu'elle est  $n$  fois dérivable et que  $f^{(n)}$  est continue sur  $D$ .

On dit que la fonction  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $D$  lorsqu'elle est de classe  $\mathcal{C}^n$  sur  $D$  pour tout entier  $n \in \mathbb{N}$ .

**NOTATION** On notera  $\mathcal{C}^n(D, \mathbb{R})$  et  $\mathcal{C}^\infty(D, \mathbb{R})$  l'ensemble des fonctions à valeurs réelles de classes  $\mathcal{C}^n$  et  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $D$ .

On se donne  $n \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$ .

De façon analogue au cas de la dérivabilité, la classe  $\mathcal{C}^n$  se comporte bien vis-à-vis des opérations usuelles.

Soient  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  et  $g : D \rightarrow \mathbb{R}$  deux fonctions et  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

#### ■ Combinaison linéaire

Si  $f$  et  $g$  sont de classe  $\mathcal{C}^n$  alors  $\lambda f + g$  est de classe  $\mathcal{C}^n$  et

$$(\lambda f + g)^{(n)} = \lambda f^{(n)} + g^{(n)}$$

#### ■ Produit – Formule de Leibniz

Si  $f$  et  $g$  sont de classe  $\mathcal{C}^n$  alors  $fg$  est de classe  $\mathcal{C}^n$  et :

$$(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}$$

■ **Quotient**

Si  $g \neq 0$  et si  $f$  et  $g$  sont de classe  $\mathcal{C}^n$  alors  $\frac{f}{g}$  est de classe  $\mathcal{C}^n$ .

Soit  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction bijective d'un intervalle  $I$  sur  $J = f(I)$ .

■ **Réciproque**

Si  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^n$  et si  $f'$  ne s'annule pas sur  $I$  alors  $f^{-1}$  est de classe  $\mathcal{C}^n$  sur  $J$ .

Soient  $f : D \rightarrow E$  et  $g : E \rightarrow \mathbb{R}$  deux fonctions.

■ **Composition**

Si  $f$  et  $g$  sont de classe  $\mathcal{C}^n$  alors  $g \circ f$  est de classe  $\mathcal{C}^n$ .

### III. 9. EXTENSION AUX FONCTIONS COMPLEXES

De façon similaire au cas de la continuité, il est possible d'étendre la notion de dérivabilité aux fonctions à valeurs dans  $\mathbb{C}$  en prenant comme définition celle de la DÉFINITION 5.

Les PROPOSITION 10, DÉFINITION 6, PROPOSITION 11, les opérations sur la dérivabilité et le THÉORÈME 12 restent valables dans le cas complexe.

**REMARQUE** Le théorème de Rolle n'est plus valable pour les fonctions complexes comme le montre la fonction  $f : t \in ]0, 2\pi[ \rightarrow e^{it} \in \mathbb{C}$  qui est bien continue sur  $]0, 2\pi[$ , dérivable sur  $]0, 2\pi[$  avec  $f(0) = f(2\pi)$  mais qui ne peut satisfaire  $f'(c) = 0$  pour un réel  $c \in ]0, 2\pi[$  puisque  $f'(t) = ie^{it} \neq 0$  pour tout  $t \in ]0, 2\pi[$ .  
En particulier, le théorème des accroissements finis ne l'est plus non plus.

L'étude de la dérivabilité d'une fonction complexe peut se ramener à l'étude de la dérivabilité des deux fonctions réelles  $\text{Re}(f)$  et  $\text{Im}(f)$  comme le précise le résultat suivant.

**THÉORÈME 15** – Dérivabilité d'une fonction complexe et de ses parties réelle et imaginaire

Soient  $f : D \rightarrow \mathbb{C}$  une fonction et  $a \in D$ .  
Alors  $f$  est dérivable en  $a$  si et seulement si  $\text{Re}(f)$  et  $\text{Im}(f)$  sont dérivables en  $a$ .  
Le cas échéant, on a :

$$f'(a) = \text{Re}(f)'(a) + i \text{Im}(f)'(a)$$

## IV. ANALYSE ASYMPTOTIQUE

### IV. 1. RELATIONS DE COMPARAISON

**DÉFINITION 9** – Relations de comparaison

Soient  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  et  $g : D \rightarrow \mathbb{R}$  deux fonctions et  $a \in \bar{D}$  un point adhérent à  $D$ . On suppose que  $g$  ne s'annule pas sur un voisinage de  $a$  sauf peut-être en  $a$  et que si  $g(a) = 0$  alors  $f(a) = 0$ .

- On dit que  $f$  est *dominée par  $g$  au voisinage de  $a$*  et l'on écrit  $f = O_a(g)$  si :

$$\frac{f}{g} \text{ est bornée au voisinage de } a$$

- On dit que  $f$  est *négligeable devant  $g$  au voisinage de  $a$*  et l'on écrit  $f = o_a(g)$  si :

$$\lim_a \frac{f}{g} = 0$$

- On dit que  $f$  est *équivalente à  $g$  au voisinage de  $a$*  et l'on écrit  $f \sim_a g$  si :

$$\lim_a \frac{f}{g} = 1$$

## REMARQUES

- On peut démontrer que la relation  $\sim$  est une relation d'équivalence.
- On a  $f \sim_a g$  si et seulement si  $f - g = o_a(g)$ .
- On a  $f$  est bornée au voisinage de  $a$  si et seulement si  $f = O_a(1)$  et  $f$  tend vers 0 en  $a$  si et seulement si  $f = o_a(1)$ .

## IV. 2. MANIPULATION DES ÉQUIVALENTS

### PROPOSITION 12 – Limite et équivalent

Soient  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  et  $g : D \rightarrow \mathbb{R}$  deux fonctions,  $a \in \bar{D}$  un point adhérent à  $D$  et  $\ell \in \bar{\mathbb{R}}$ . On suppose que  $g$  ne s'annule pas sur un voisinage de  $a$  sauf peut-être en  $a$  et que si  $g(a) = 0$  alors  $f(a) = 0$ .

- Si  $f \sim_a g$  et si  $\lim_a g = \ell$  alors  $\lim_a f = \ell$ .
- Si  $\lim_a f = \ell$  avec  $\ell \neq 0$  alors  $f \sim_a \ell$ .

### PROPOSITION 13 – Signe et équivalent

Soient  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  et  $g : D \rightarrow \mathbb{R}$  deux fonctions et  $a \in \bar{D}$  un point adhérent à  $D$ . On suppose que  $g$  ne s'annule pas sur un voisinage de  $a$  sauf peut-être en  $a$  et que si  $g(a) = 0$  alors  $f(a) = 0$ .

Si  $f \sim_a g$  et si  $g$  est positive sur un voisinage de  $a$  alors  $f$  est également positive sur un voisinage de  $a$ .

### PROPOSITION 14 – Opérations sur les équivalents

Pour  $i \in \{1, 2\}$ , soient  $f_i : D \rightarrow \mathbb{R}$  et  $g_i : D \rightarrow \mathbb{R}$  des fonctions et  $a \in \bar{D}$  un point adhérent à  $D$ . On suppose que  $g_i$  ne s'annule pas sur un voisinage de  $a$  sauf peut-être en  $a$  et que si  $g_i(a) = 0$  alors  $f_i(a) = 0$ . Soient également  $\varphi : E \rightarrow \mathbb{R}$  et  $b \in \bar{E}$ .

- **Produit :** Si  $f_1 \sim_a g_1$  et  $f_2 \sim_a g_2$  alors :

$$f_1 f_2 \sim_a g_1 g_2$$

- **Puissance :** Si  $k \in \mathbb{N}$  et si  $f_1 \sim_a g_1$  alors :

$$f_1^k \sim_a g_1^k$$

- **Quotient :** Si  $f_1 \sim_a g_1$  et  $f_2 \sim_a g_2$  alors :

$$\frac{f_1}{f_2} \sim_a \frac{g_1}{g_2}$$

- **Substitution :** Si  $\lim_b \varphi = a$  et  $f_1 \sim_a g_1$  alors :

$$f_1 \circ \varphi \sim_b g_1 \circ \varphi$$

## REMARQUES

- On ne peut pas sommer les équivalents.  
Par exemple,  $x + 1 \sim_{+\infty} x$  et  $-x + 2 \sim_{+\infty} -x + 1$  mais l'on a pas  $3 \sim_{+\infty} 1$ .
- On ne peut pas composer à gauche dans les équivalents.  
Par exemple,  $x + 1 \sim_{+\infty} x$  mais l'on a pas  $e^{x+1} \sim_{+\infty} e^x$ .

### IV. 3. DÉVELOPPEMENTS LIMITÉS

#### DÉFINITION 10 – Développement limité

Soit  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction et  $a \in \overline{D}$ .

On dit que la fonction  $f$  admet un développement limité à l'ordre  $n \in \mathbb{N}$  en  $a$  (abrégé en  $DL_n(a)$ ) si il existe des réels  $a_0, a_1, \dots, a_n$  tels que :

$$f(x) = a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + \dots + a_n(x-a)^n + o_a((x-a)^n)$$

Le polynôme de degré  $n$  défini par  $P(x) = a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + \dots + a_n(x-a)^n$  est appelé la partie régulière du développement limité à l'ordre  $n$  en  $a$  de  $f$ .

#### REMARQUE – Unicité du développement limité

Si une fonction admet un développement limité à l'ordre  $n \in \mathbb{N}$  en  $a$  alors les coefficients  $a_0, a_1, \dots, a_n$  de la partie régulière sont uniques.

### IV. 4. LIEN ENTRE RÉGULARITÉ ET DÉVELOPPEMENTS LIMITÉS

#### PROPOSITION 15 – Lien entre continuité, dérivabilité et développements limités

Soit  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction et  $a \in D$ .

- La fonction  $f$  admet un  $DL_0(a)$  si et seulement si  $f$  est continue en  $a$  et dans ce cas :

$$f(x) = f(a) + o_a(1)$$

- La fonction  $f$  admet un  $DL_1(a)$  si et seulement si  $f$  est dérivable en  $a$  et dans ce cas :

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + o_a(x-a)$$

#### THÉORÈME 16 – Théorème de Taylor-Young

Soient  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction définie sur un intervalle  $I$  avec  $a \in I$  et  $n \in \mathbb{N}$ .

Si  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^n$  sur  $I$  alors  $f$  admet un  $DL_n(a)$  donné par :

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k + o_a((x-a)^n)$$

**REMARQUE** La réciproque est fautive en général. Par exemple, on pourra vérifier que la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = x + x^3 \sin(x^{-2})$  pour  $x \neq 0$  et  $f(0) = 0$  admet un  $DL_2(0)$  mais n'est pas deux fois dérivable en 0.

### IV. 5. OBTENTION DE DÉVELOPPEMENTS LIMITÉS

En pratique, à partir des développements limités usuels, les opérations sur les développements limités permettent d'obtenir le développement limité de nombreuses fonctions réelles.

### IV. 6. APPLICATIONS DES DÉVELOPPEMENTS LIMITÉS

#### PROPOSITION 16 – Équivalent et développement limité

Soient  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction,  $a \in \overline{D}$  et  $0 \leq p \leq n$ .

On suppose que  $f$  admet un  $DL_n(a)$  de la forme  $f(x) = a_p(x-a)^p + \dots + a_n(x-a)^n + o_a((x-a)^n)$  avec  $a_p \neq 0$ .

Alors on a l'équivalent :

$$f(x) \sim_a a_p(x-a)^p$$

**PROPOSITION 17** – *Position relative d'une courbe et de sa tangente*

Soient  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction,  $a \in \overline{D}$  et  $p \geq 2$ .

On suppose que  $f$  admet un  $DL_p(a)$  de la forme  $f(x) = a_0 + a_1(x-a) + a_p(x-a)^p + o_a((x-a)^p)$  avec  $a_p \neq 0$ .

Alors la courbe représentative de  $f$  admet une tangente au point  $a$  d'équation  $y = a_0 + a_1(x-a)$  et la position de la courbe par rapport à cette tangente est donnée par le signe de  $a_p(x-a)^p$  au voisinage de  $a$ .

## V. INTÉGRATION SUR UN SEGMENT

En première année a été introduite l'intégrale de toute fonction  $f$  continue sur un segment  $[a, b]$  et à valeurs réelles.

### V. 1. PROPRIÉTÉS DE L'INTÉGRALE

**PROPOSITION 18** – *Propriétés de l'intégrale*

Soient  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  et  $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  deux fonctions continues sur  $[a, b]$ .

- **Linéarité :** Pour tout  $\lambda \in \mathbb{R}$ ,  $\int_a^b (\lambda f + g) = \lambda \int_a^b f + \int_a^b g$ .
- **Inégalité triangulaire :** Si  $a \leq b$ ,  $\left| \int_a^b f \right| \leq \int_a^b |f|$ .
- **Relation de Chasles :** Si  $c \in [a, b]$ ,  $\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$ .

**PROPOSITION 19** – *Positivité, croissance et nullité*

Soient  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  et  $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  deux fonctions continues sur  $[a, b]$ .

- **Positivité :** Si  $f \geq 0$  sur  $[a, b]$  et si  $a \leq b$  alors  $\int_a^b f \geq 0$ .
- **Croissance :** Si  $f \leq g$  sur  $[a, b]$  et si  $a \leq b$  alors  $\int_a^b f \leq \int_a^b g$ .
- **Nullité :** Si  $f \geq 0$  sur  $[a, b]$  et si  $\int_a^b f = 0$  alors  $f$  est nulle sur  $[a, b]$ .

**REMARQUE** Pour la positivité et la croissance, l'ordre des bornes d'intégration est importante. Ainsi, si jamais  $a \geq b$ , l'inégalité du résultat est inversée.

### V. 2. SOMMES DE RIEMANN

**THÉORÈME 17** – *Convergence des sommes de Riemann*

Soit  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue sur  $[a, b]$ . Alors :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^n f\left(a + k \frac{b-a}{n}\right) = \int_a^b f(t) dt \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k \frac{b-a}{n}\right) = \int_a^b f(t) dt$$

### V. 3. PRIMITIVES D'UNE FONCTION CONTINUE

#### DÉFINITION 11 – Primitive d'une fonction

Soit  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction définie sur un intervalle  $I$ .

On appelle *primitive de  $f$*  toute fonction  $F : I \rightarrow \mathbb{R}$  dérivable vérifiant  $F' = f$ .

#### PROPOSITION 20 – Description des primitives

Soit  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction définie sur un intervalle  $I$ .

Si  $f$  possède une primitive  $F_0$  alors les primitives de  $f$  sont toutes les fonctions  $F_0 + C$  pour  $C \in \mathbb{R}$ .

#### THÉORÈME 18 – Théorème fondamental de l'analyse

Soient  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue sur un intervalle  $I$  et  $a \in I$ .

- La fonction  $f$  admet une unique primitive sur  $I$  qui s'annule en  $a$  donnée par la fonction  $F_a$  suivante :

$$\forall x \in I, \quad F_a(x) = \int_a^x f(t) dt$$

La fonction  $F_a$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $I$  avec  $F'_a = f$ .

- Pour toute primitive  $F$  de  $f$  sur  $I$  on a :

$$\forall x \in I, \quad \int_a^x f(t) dt = [F(t)]_a^x = F(x) - F(a)$$

**REMARQUE** En particulier, si  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $I$  on a :

$$\forall (a, x) \in I^2, \quad f(x) - f(a) = \int_a^x f'(t) dt$$

### V. 4. CALCUL D'INTÉGRALES

#### PROPOSITION 21 – Intégration par parties

Soient  $u : I \rightarrow \mathbb{R}$  et  $v : I \rightarrow \mathbb{R}$  deux fonctions de classe  $\mathcal{C}^1$  sur un intervalle  $I$  et  $(a, b) \in I^2$ . Alors :

$$\int_a^b u'(t)v(t) dt = [u(t)v(t)]_a^b - \int_a^b u(t)v'(t) dt$$

#### PROPOSITION 22 – Changement de variable

Soient  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue sur un intervalle  $I$ ,  $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction de classe  $\mathcal{C}^1$  sur un segment  $[a, b]$  avec  $\varphi([a, b]) \subset I$ . Alors :

$$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x) dx = \int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t) dt$$

On dit que l'on a effectué le changement de variable  $x = \varphi(t)$ .

### V. 5. FORMULES DE TAYLOR

La formule de Taylor-Young, qui est une formule locale, a été énoncée dans la partie d'analyse asymptotique. La formule de Taylor avec reste intégral, qui est une formule globale, est énoncée ci-après.



**THÉORÈME 19** – Formule de Taylor avec reste intégral

Soient  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction de classe  $\mathcal{C}^{n+1}$  sur un intervalle  $I$  et  $(a, x) \in I^2$ . Alors :

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k + \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) dt$$

**REMARQUE** La formule de Taylor avec reste intégral explicite sous forme intégrale l'erreur commise en approximant  $f$  par la partie régulière de son développement limité à l'ordre  $n$  en  $a$ , moyennant l'hypothèse  $f$  de classe  $\mathcal{C}^{n+1}$ . Avec une hypothèse plus faible —  $f$  de classe  $\mathcal{C}^n$  —, la formule de Taylor-Young stipule que cette erreur tend vers 0 plus vite que  $(x-a)^n$ .

**V. 6. EXTENSION AUX FONCTIONS COMPLEXES**

On peut aisément définir l'intégrale d'une fonction  $f$  continue sur un segment  $[a, b]$  et à valeurs complexes grâce à l'intégrale des fonctions réelles en posant :

$$\int_a^b f = \int_a^b \operatorname{Re}(f) + i \int_a^b \operatorname{Im}(f)$$

Dès lors, tous les résultats précédents **excepté** la **PROPOSITION 19** concernant la positivité, croissante et nullité de l'intégrale restent valables dans le cas complexe.