COMPLÉMENTS SUR LES SÉRIES

Plan du cours

Dans la suite, on notera $\overline{\mathbb{R}}$ l'ensemble $\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ sur lequel on a prolongé la relation d'ordre de $\mathbb{R}$ ainsi que les opérations $+$ et $\times$ de $\mathbb{R}$ lorsque cela est possible.

I. Séries à termes réels positifs

I. 1. Règle de d'Alembert

Pour rappel, il a été vu en première année une méthode permettant de prouver la convergence d'une série par comparaison à une série de Riemann :

Méthode – *Comparaison à une série de Riemann*

S'il existe $\alpha > 1$ tel que $n^\alpha u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ alors la série $\sum u_n$ converge (absolument).

Remarque Plus généralement, la conclusion subsiste s'il existe $\alpha > 1$ tel que la suite $(n^\alpha u_n)$ soit bornée.

Exemples 1

Donner la nature des séries suivantes :

(1) $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} e^{-\sqrt{n}}$ **(2)** $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} n^2 e^{-n}$ **(3)** $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^{\frac{3}{2}} \ln n}$

Nous présentons ici un résultat basé sur une comparaison à une série géométrique.

Proposition 1 – *Règle de d'Alembert*

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle à termes strictement positifs à partir d'un certain rang.
On suppose que :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \ell \in \overline{\mathbb{R}}$$

- Si $\ell < 1$, alors $\sum u_n$ converge ;
- si $\ell > 1$, alors $\sum u_n$ diverge grossièrement.

Remarque 1 Lorsque $\ell = 1$, on ne peut rien dire. Étudier par exemple les deux cas suivants : $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n}$ et $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^2}$.

Exemples 2

(1) Pour $z \in \mathbb{C}$, montrer que la série $\sum_{n\geqslant 0} \frac{z^n}{n!}$ (appelée *série exponentielle*) converge absolument.

(2) Étudier la convergence de la série $\sum_{n\geqslant 0} \binom{2n}{n}^{-1}$

I. 2. Formule de Stirling

Proposition 2 – *Formule de Stirling*

On a l'équivalent suivant :

$$n! \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$$

I. 3. Comparaison à une intégrale

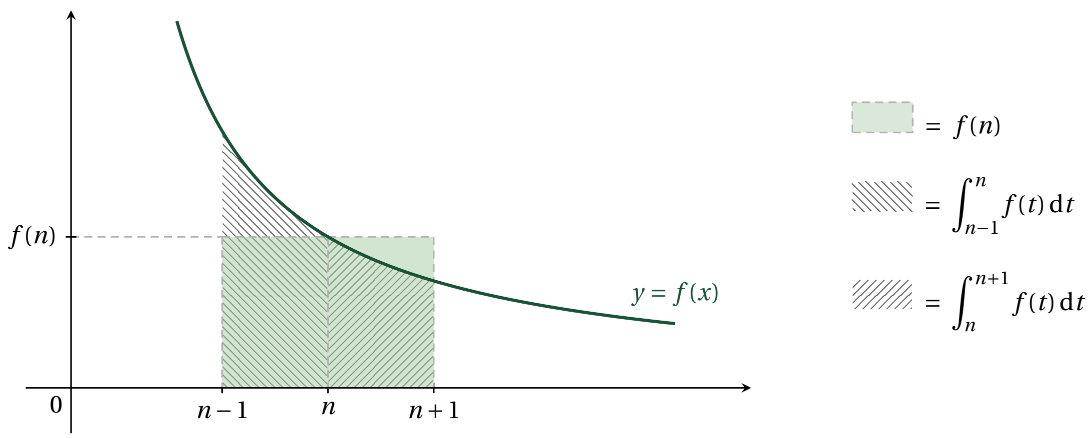
Proposition 3 – *Encadrement préliminaire*

Soient $n_0 \in \mathbb{N}$ et $f : [n_0, +\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction décroissante et continue.

Alors : $$\forall n \geqslant n_0 + 1, \quad \int_n^{n+1} f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant f(n) \leqslant \int_{n-1}^{n} f(t)\,\mathrm{d}t$$

Remarque – *Illustration graphique*

L'encadrement précédent se comprend très bien graphiquement :



En sommant cet encadrement préliminaire, on peut obtenir le résultat suivant.

Proposition 4 – *Encadrement des sommes partielles*

Soient $n_0 \in \mathbb{N}$ et $f : [n_0, +\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction décroissante et continue.

Alors : $$\forall \mathrm{N} \geqslant n_0, \quad \int_{n_0}^{\mathrm{N}+1} f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \sum_{n=n_0}^{\mathrm{N}} f(n) \leqslant f(n_0) + \int_{n_0}^{\mathrm{N}} f(t)\,\mathrm{d}t$$

PROPOSITION 5 – *Comparaison à une intégrale*

Soient $n_0 \in \mathbb{N}$ et $f : [n_0, +\infty[\to \mathbb{R}_+$ une fonction positive, décroissante et continue.

Alors la série $\sum_{n \geqslant n_0} f(n)$ converge si et seulement si la fonction f est *intégrable* sur $[n_0, +\infty[$, c'est-à-dire si et seulement si la quantité $\displaystyle\int_{n_0}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t$ admet une limite finie lorsque x tend vers $+\infty$.

EXEMPLE 3

Donner la nature de la série $\displaystyle\sum_{n \geqslant 2} \frac{1}{n(\ln n)^2}$.

REMARQUE En cas de divergence de la série $\sum_{k \geqslant n_0} f(k)$, la somme partielle $\mathrm{S}_n = \sum_{k=n_0}^{n} f(k)$ tend vers $+\infty$ lorsque n tend vers $+\infty$ d'après le théorème de la limite monotone. La **PROPOSITION 4** permet d'obtenir un équivalent de S_n lorsque n tend vers $+\infty$.

EXEMPLE 4 – *Équivalent de la somme partielle de la série harmonique*

Établir l'équivalent suivant :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \underset{+\infty}{\sim} \ln n$$

EXERCICE 5 – *La constante d'Euler γ*

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose :

$$\mathrm{H}_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$

1. Prouver l'existence d'une constante γ, appelée *constante d'Euler*, telle que :

$$\gamma = \lim_{n \to +\infty} (\mathrm{H}_n - \ln n)$$

2. En déduire que :

$$\mathrm{H}_n = \ln n + \gamma + o(1)$$

II. SÉRIES ALTERNÉES

DÉFINITION 1 – *Série alternée*

On dit que la série réelle $\sum u_n$ est *alternée* si pour tout entier n les termes u_n et u_{n+1} sont de signes contraires.

REMARQUE Une série alternée peut toujours s'écrire sous la forme :

$$\sum (-1)^n a_n \quad \text{ou} \quad \sum (-1)^{n+1} a_n$$

avec $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite positive selon que le premier terme soit positif ou négatif.

Théorème 1 – *Théorème spécial des séries alternées*

Soit $\sum u_n$ une série alternée.

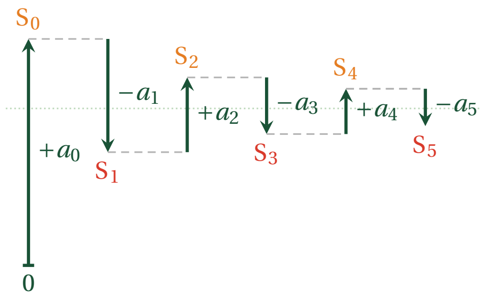
On suppose que la valeur absolue $|u_n|$ du terme général décroît et tend vers 0. Alors :

- La série $\sum u_n$ converge.
- Sa somme est toujours comprise entre deux sommes partielles consécutives.
- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, le reste $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$ est du signe du premier terme u_{n+1} et vérifie :

$$|R_n| \leqslant |u_{n+1}|$$

Remarques

- La somme S de la série $\sum u_n$ est du signe du premier terme u_0 puisque $S = u_0 + R_0$ avec $|R_0| \leqslant |u_1| \leqslant |u_0|$.
- Si la suite $(|u_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ ne décroît qu'à partir d'un certain rang n_0, le théorème ci-dessus s'applique mais les encadrements ne pourront être écrits que pour des indices $n \geqslant n_0$.



Exemples 6

(1) Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, étudier la nature de la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^n}{n^\alpha}$.

(2) Prouver que la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2}$ converge et que sa somme S est dans $[3/4, 1]$.

Tenter ensuite d'obtenir un encadrement plus précis.

Méthode – *Étude d'une série à termes de signe non constant par développement asymptotique*

Pour étudier la nature d'une série réelle dont les termes ne sont pas de signe constant, il est peut être judicieux de faire un développement asymptotique du terme général jusqu'à obtenir le terme général d'une série absolument convergente ou un terme de signe constant.

Exemples 7

Étudier la nature des deux séries suivantes :

(1) $\sum_{n\geqslant 1} \ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)$ **(2)** $\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^n}{n + (-1)^{n-1}}$

III. Produit de Cauchy de deux séries

Définition 2 – *Produit de Cauchy de deux séries*

Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries. On appelle *produit de Cauchy* de ces deux séries la série $\sum w_n$ où :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad w_n = \sum_{p+q=n} u_p v_q = \sum_{p=0}^{n} u_p v_{n-p}$$

Théorème 2 – *Convergence du produit de Cauchy de deux séries*

Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries absolument convergentes.
Alors le produit de Cauchy de ces deux séries converge absolument et :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} w_n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} v_n\right)$$

Remarque Le résultat est faux pour des séries seulement convergentes. Plus précisément, on peut trouver deux séries convergentes dont le produit de Cauchy ne converge même pas.

Exemples 8

(1) Pour $x \in]-1,1[$, prouver la convergence et donner la somme de $\sum\limits_{n\geqslant 0}(n+1)x^n$.

(2) Pour $z \in \mathbb{C}$, on pose :

$$\exp(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$$

Si $(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2$, montrer que : $\exp(z_1 + z_2) = \exp(z_1)\exp(z_2)$.