



## PLAN DU COURS

<b>I. PRODUIT ET SOMME D'ESPACES VECTORIELS</b>	<b>1</b>
I. 1. Produit d'espaces vectoriels . . . . .	1
I. 2. Somme d'espaces vectoriels . . . . .	2
I. 3. Somme directe d'espaces vectoriels . . . . .	2
I. 4. Somme directe et bases . . . . .	3
I. 5. Somme directe et applications linéaires . . . . .	4
<b>II. MATRICES ET ENDOMORPHISMES</b>	<b>4</b>
II. 1. Polynôme d'une matrice, d'un endomorphisme . . . . .	4
II. 2. Matrices par blocs et opérations . . . . .	6
II. 3. Sous-espaces stables . . . . .	8
II. 4. Matrices semblables . . . . .	9
II. 5. Trace d'une matrice, d'un endomorphisme . . . . .	9
<b>III. COMPLÉMENTS SUR LES DÉTERMINANTS</b>	<b>10</b>
III. 1. Déterminant d'une matrice triangulaire par blocs . . . . .	10
III. 2. Exemples de calculs de déterminants . . . . .	11
<b>IV. FORMES LINÉAIRES ET HYPERPLANS EN DIMENSION FINIE</b>	<b>11</b>

Dans la suite,  $\mathbb{K}$  désignera  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ .

## I. PRODUIT ET SOMME D'ESPACES VECTORIELS

### I. 1. PRODUIT D'ESPACES VECTORIELS

#### DÉFINITION 1 – Espace produit

Soient  $E_1, \dots, E_p$  une famille finie de  $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels.  
On définit sur le produit cartésien  $E_1 \times \dots \times E_p$  deux lois :

■ **L'addition :**

$$\forall (x_1, \dots, x_p), (y_1, \dots, y_p) \in E_1 \times \dots \times E_p, \quad (x_1, \dots, x_p) + (y_1, \dots, y_p) = (x_1 + y_1, \dots, x_p + y_p)$$

■ **La multiplication par un scalaire :**

$$\forall (x_1, \dots, x_p) \in E_1 \times \dots \times E_p, \quad \forall \lambda \in \mathbb{K}, \quad \lambda \cdot (x_1, \dots, x_p) = (\lambda x_1, \dots, \lambda x_p)$$

**NOTATION** L'espace produit  $E_1 \times \dots \times E_p$  peut également être noté  $\prod_{k=1}^p E_k$ .

**PROPOSITION 1** – Espace produit

Soient  $E_1, \dots, E_p$  une famille finie de  $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels.

Alors le produit cartésien  $E_1 \times \dots \times E_p$  muni des deux lois précédentes est un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel.

**PROPOSITION 2** – Dimension d'un espace produit

Soient  $E_1, \dots, E_p$  une famille finie de  $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels.

Si  $E_1, \dots, E_p$  sont de dimension finie alors le produit cartésien  $E_1 \times \dots \times E_p$  est de dimension finie et :

$$\dim(E_1 \times \dots \times E_p) = \dim(E_1) + \dots + \dim(E_p)$$

## I. 2. SOMME D'ESPACES VECTORIELS

**DÉFINITION 2** – Somme de sous-espaces vectoriels

Soient  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et  $E_1, \dots, E_p$  une famille finie de sous-espaces vectoriels de  $E$ .

On appelle *somme des sous-espaces vectoriels*  $E_1, \dots, E_p$  l'ensemble noté  $E_1 + \dots + E_p$  défini par :

$$E_1 + \dots + E_p = \{x_1 + \dots + x_p, (x_1, \dots, x_p) \in E_1 \times \dots \times E_p\}$$

**NOTATION** La somme  $E_1 + \dots + E_p$  peut également être notée  $\sum_{k=1}^p E_k$ .

**REMARQUE** En définissant l'application  $\varphi$  suivante :

$$\begin{aligned} \varphi : E_1 \times \dots \times E_p &\longrightarrow E \\ (x_1, \dots, x_p) &\longmapsto x_1 + \dots + x_p \end{aligned}$$

on peut écrire que  $E_1 + \dots + E_p = \text{Im } \varphi$ .

**PROPOSITION 3** – Somme de sous-espaces vectoriels

Soient  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et  $E_1, \dots, E_p$  une famille finie de sous-espaces vectoriels de  $E$ .

Alors la somme  $E_1 + \dots + E_p$  est un sous-espace vectoriel de  $E$ .

**REMARQUE** On peut montrer que  $E_1 + \dots + E_p$  est le plus petit sous-espace vectoriel de  $E$  (au sens de l'inclusion) contenant les sous-espaces vectoriels  $E_1, \dots, E_p$ .

## I. 3. SOMME DIRECTE D'ESPACES VECTORIELS

**DÉFINITION 3** – Somme directe de sous-espaces vectoriels

Soient  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et  $E_1, \dots, E_p$  une famille finie de sous-espaces vectoriels de  $E$ .

On dit que les sous-espaces vectoriels  $E_1, \dots, E_p$  sont *en somme directe* si :

$$\forall (x_1, \dots, x_p) \in E_1 \times \dots \times E_p, \quad x_1 + \dots + x_p = 0 \implies x_1 = \dots = x_p = 0$$

Dans ce cas, on note  $E_1 \oplus \dots \oplus E_p$  la somme  $E_1 + \dots + E_p$  et on dit que la somme est *directe*.

**NOTATION** La somme  $E_1 \oplus \dots \oplus E_p$  peut également être notée  $\bigoplus_{k=1}^p E_k$ .

## REMARQUES

- La somme  $E_1 + \dots + E_p$  est directe si et seulement si l'application  $\varphi$  définie plus haut est injective.
- En première année, il a été vu que la somme  $F+G$  est directe si et seulement si  $F \cap G = \emptyset$ . Cette caractérisation ne s'étend pas au cas  $p \geq 3$ , c'est-à-dire que le fait que les intersections deux à deux soit réduites à  $\{0\}$  ne permet pas de conclure que la somme est directe.

## EXEMPLE 1

Dans  $\mathbb{R}^2$ , on pose  $E_1 = \text{Vect}((1, 0))$ ,  $E_2 = \text{Vect}((0, 1))$  et  $E_3 = \text{Vect}((1, 1))$ .  
Montrer que  $E_1 \cap E_2 = \emptyset$ ,  $E_1 \cap E_3 = \emptyset$  et  $E_2 \cap E_3 = \emptyset$  bien que la somme  $E_1 + E_2 + E_3$  ne soit pas directe.

### PROPOSITION 4 – Dimension d'une somme de sous-espaces vectoriels

Soient  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et  $E_1, \dots, E_p$  une famille finie de sous-espaces vectoriels de  $E$ .  
Si  $E_1, \dots, E_p$  sont de dimension finie alors on a :

$$\dim \left( \sum_{k=1}^p E_k \right) \leq \sum_{k=1}^p \dim(E_k)$$

De plus il y a égalité si et seulement si la somme est directe.

### PROPOSITION 5 – Décomposition dans une somme directe

Soient  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et  $E_1, \dots, E_p$  une famille finie de sous-espaces vectoriels de  $E$ .  
La somme  $E_1 + \dots + E_p$  est directe si et seulement si :

$$\forall x \in E_1 + \dots + E_p, \quad \exists! (x_1, \dots, x_p) \in E_1 \times \dots \times E_p, \quad x = \sum_{k=1}^p x_k$$

## REMARQUES – Sous-espaces supplémentaires

- On dit que deux sous-espaces  $F$  et  $G$  d'un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel  $E$  sont *supplémentaires* si  $E = F \oplus G$ .
- On rappelle les deux résultats suivants :  
 $E = F \oplus G \iff \dim(F) + \dim(G) = \dim(E)$  et  $F \cap G = \emptyset \iff F + G = E$  et  $\dim(F) + \dim(G) = \dim(E)$
- Tout sous-espace vectoriel  $F$  d'un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel  $E$  de dimension finie admet un supplémentaire.  
Il n'y a pas unicité du supplémentaire comme le montre l'exemple qui suit.

## EXEMPLES 2

- (1) On note respectivement  $S_n(\mathbb{K})$  et  $A_n(\mathbb{K})$  l'ensemble des matrices symétriques et antisymétriques de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ . On introduit également  $T_n^+(\mathbb{K})$  l'ensemble des matrices triangulaires supérieures strictes (*i.e.* de diagonale nulle) de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ .  
Prouver que  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K}) = S_n(\mathbb{K}) \oplus A_n(\mathbb{K})$  et  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K}) = S_n(\mathbb{K}) \oplus T_n^+(\mathbb{K})$ .
- (2) On travaille dans le  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel  $\mathcal{F}([-1, 1], \mathbb{R})$  des fonctions de  $[-1, 1]$  dans  $\mathbb{R}$  et on considère les sous-espaces vectoriels :  
 $F_1 = \{f \in E, f \text{ est constante}\}$ ,  $F_2 = \{f \in E, f = 0 \text{ sur } [-1, 0]\}$  et  $F_3 = \{f \in E, f = 0 \text{ sur } [0, 1]\}$   
Prouver que  $E = F_1 \oplus F_2 \oplus F_3$ .

## I. 4. SOMME DIRECTE ET BASES

On commence par définir la notion de *base adaptée*.

### VOCABULAIRE – Bases adaptées

- Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie et  $F$  un sous-espace vectoriel de  $E$ .  
On appelle *base adaptée* à  $F$  toute base  $\mathcal{B}$  de  $E$  de la forme  $\mathcal{B} = (\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2)$  avec  $\mathcal{B}_1$  base de  $F$ .

- Soient  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie et  $E_1, \dots, E_p$  une famille finie de sous-espaces vectoriels de  $E$  tels que  $E = \bigoplus_{k=1}^p E_k$ .  
On appelle *base adaptée à la décomposition en somme directe* toute base  $\mathcal{B}$  de  $E$  de la forme  $\mathcal{B} = (\mathcal{B}_1, \dots, \mathcal{B}_p)$  avec, pour  $k \in \llbracket 1, p \rrbracket$ ,  $\mathcal{B}_k$  une base de  $E_k$ .

**PROPOSITION 6** – Somme directe et bases

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie.

- Soit  $\mathcal{B} = (\mathcal{B}_1, \dots, \mathcal{B}_p)$  une base de  $E$  fractionnée en  $p$  sous-familles  $\mathcal{B}_1, \dots, \mathcal{B}_p$  de vecteurs.

Alors :

$$E = \bigoplus_{k=1}^p \text{Vect}(\mathcal{B}_k)$$

- On suppose que  $E = \bigoplus_{k=1}^p E_k$  avec  $E_1, \dots, E_p$  des sous-espaces vectoriels de  $E$ .

Si, pour tout  $k \in \llbracket 1, p \rrbracket$ ,  $\mathcal{B}_k$  désigne une base de  $E_k$ , la famille  $\mathcal{B} = (\mathcal{B}_1, \dots, \mathcal{B}_p)$  est une base de  $E$ .

## I. 5. SOMME DIRECTE ET APPLICATIONS LINÉAIRES

On rappelle qu'une application linéaire peut être déterminée de façon unique en donnant les images des vecteurs d'une base de l'ensemble de départ. Le résultat qui suit répond à une problématique similaire dans le cas d'une décomposition en somme directe de l'espace de départ.

**PROPOSITION 7** – Définition d'une application linéaire par ses restrictions à une somme directe

Soient  $E$  et  $F$  deux  $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels et  $E_1, \dots, E_p$  une famille de sous-espaces vectoriels de  $E$  tels que :

$$E = \bigoplus_{k=1}^p E_k$$

Si, pour tout  $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$ ,  $u_i \in \mathcal{L}(E_i, F)$ , alors il existe une unique application linéaire  $u \in \mathcal{L}(E, F)$  telle que :

$$\forall i \in \llbracket 1, p \rrbracket, \quad u|_{E_i} = u_i$$

## II. MATRICES ET ENDOMORPHISMES

### II. 1. POLYNÔME D'UNE MATRICE, D'UN ENDOMORPHISME

Soient  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  une matrice et  $u \in \mathcal{L}(E)$  un endomorphisme.

On pose :  $A^0 = I_n$  et  $u^0 = \text{id}_E$  et  $\forall k \in \mathbb{N}^*$ ,  $A^k = \underbrace{A \times \dots \times A}_{k \text{ fois}}$  et  $u^k = \underbrace{u \circ \dots \circ u}_{k \text{ fois}}$

On a alors :  $\forall k, \ell \in \mathbb{N}$ ,  $A^{k+\ell} = A^k A^\ell = A^\ell A^k$  et  $u^{k+\ell} = u^k \circ u^\ell = u^\ell \circ u^k$

**DÉFINITION 4** – Polynôme d'une matrice, d'un endomorphisme

Soient  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  une matrice et  $u \in \mathcal{L}(E)$  un endomorphisme et  $P = \sum_{k=0}^d a_k X^k \in \mathbb{K}[X]$  un polynôme.

On définit :  $P(A) = \sum_{k=0}^d a_k A^k \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  et  $P(u) = \sum_{k=0}^d a_k u^k \in \mathcal{L}(E)$

On parle de *polynôme de matrice* ou de *polynôme d'endomorphisme*.

**PROPOSITION 8** – Opérations sur les polynômes de matrice et d'endomorphisme

Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  une matrice.

- L'application  $P \mapsto P(A)$  est une application linéaire de  $\mathbb{K}[X]$  sur  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ .  
Ainsi, si  $P, Q \in \mathbb{K}[X]$  et  $\lambda \in \mathbb{K}$ , alors :

$$(\lambda P + Q)(A) = \lambda P(A) + Q(A)$$

- Si  $P, Q \in \mathbb{K}[X]$  alors :

$$(PQ)(A) = P(A)Q(A) = Q(A)P(A)$$

Soit  $u \in \mathcal{L}(E)$  un endomorphisme.

- L'application  $P \mapsto P(u)$  est une application linéaire de  $\mathbb{K}[X]$  sur  $\mathcal{L}(E)$ .  
Ainsi, si  $P, Q \in \mathbb{K}[X]$  et  $\lambda \in \mathbb{K}$ , alors :

$$(\lambda P + Q)(u) = \lambda P(u) + Q(u)$$

- Si  $P, Q \in \mathbb{K}[X]$  alors :

$$(PQ)(u) = P(u) \circ Q(u) = Q(u) \circ P(u)$$

**PROPOSITION 9** – Matrice d'un polynôme d'endomorphisme

Soient  $u \in \mathcal{L}(E)$  un endomorphisme,  $\mathcal{B}$  une base de  $E$  et  $P \in \mathbb{K}[X]$  un polynôme.

On a :

$$M_{\mathcal{B}}(P(u)) = P(M_{\mathcal{B}}(u))$$

**DÉFINITION 5** – Polynôme annulateur d'une matrice, d'un endomorphisme

Soient  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  une matrice et  $u \in \mathcal{L}(E)$  un endomorphisme et  $P \in \mathbb{K}[X]$  un polynôme.

- On dit que  $P$  est un *polynôme annulateur de  $A$*  si  $P(A) = 0$
- On dit que  $P$  est un *polynôme annulateur de  $u$*  si  $P(u) = 0$

**REMARQUES 1**

- Le polynôme nul est toujours un polynôme annulateur mais ce n'est pas le plus intéressant!
- Si  $P$  est annulateur de  $u \in \mathcal{L}(E)$  ou  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ , tout multiple de  $P$  l'est aussi.
- Si  $E$  est de dimension finie  $n$  et  $u \in \mathcal{L}(E)$  ou si  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  alors il existe au moins un polynôme annulateur non nul de  $u$  ou de  $A$ .  
En effet, il suffit de remarquer que les familles  $(\text{id}_E, u, \dots, u^{n^2})$  et  $(I_n, A, \dots, A^{n^2})$  sont liées dans  $\mathcal{L}(E)$  et  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ .
- Si  $E$  est de dimension infinie, il peut ne pas exister d'autres polynômes annulateurs que le polynôme nul. Par exemple, si  $E = \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ , l'endomorphisme qui à une suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  associe la suite  $(u_{n+1})_{n \in \mathbb{N}}$  n'admet pas de polynôme annulateur non nul.

 **EXEMPLE 3**

Trouver des polynômes annulateurs (non nuls!) des matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

**MÉTHODE** – Calcul de l'inverse d'une matrice grâce à un polynôme annulateur

S'il existe  $P \in \mathbb{K}[X]$  un polynôme annulateur de  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  tel que  $P(0) \neq 0$  alors  $A$  est inversible et il est possible d'exprimer  $A^{-1}$  comme un polynôme en  $A$ .

En effet, si  $P(X) = \sum_{k=0}^d a_k X^k$  avec  $a_0 = P(0) \neq 0$ , on obtient, en plaçant le terme  $a_0 I_n$  à droite et en factorisant par  $A$  à gauche :

$$P(A) = 0 \iff \sum_{k=1}^d a_k A^k + a_0 I_n = 0 \iff A \left( \sum_{k=1}^d a_k A^{k-1} \right) = -a_0 I_n$$

De même, en factorisant par  $A$  à droite, on a :

$$P(A) = 0 \iff \sum_{k=1}^d a_k A^k + a_0 I_n = 0 \iff \left( \sum_{k=1}^d a_k A^{k-1} \right) A = -a_0 I_n$$

On en déduit finalement que  $A$  est inversible et que :

$$A^{-1} = -\frac{1}{a_0} \sum_{k=1}^d a_k A^{k-1}$$

**MÉTHODE** – Calcul des puissances d'une matrice grâce à un polynôme annulateur

Soit  $P \in \mathbb{K}[X]$  un polynôme annulateur de  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ . On se donne  $k \in \mathbb{N}$  et on souhaite calculer  $A^k$ .

On effectue la division euclidienne de  $X^k$  par  $P$ , il existe  $Q_k \in \mathbb{K}[X]$  et  $R_k \in \mathbb{K}[X]$  de degré strictement inférieur à  $\deg(P)$  tels que  $X^k = PQ + R$ . En appliquant en la matrice  $A$  il vient :

$$A^k = PQ_k(A) + R_k(A) = P(A)Q_k(A) + R_k(A) = R_k(A)$$

de sorte que l'obtention de la puissance  $k$ -ème de  $A$  se résume au calcul de  $R_k(A)$ . Cette méthode est intéressante lorsqu'on dispose d'un polynôme annulateur de bas degré.

**EXEMPLE 4**

Calculer l'inverse et les puissances de la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 3 & 5 & -6 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

On pourra commencer par chercher un polynôme annulateur de  $A$ .

## II. 2. MATRICES PAR BLOCS ET OPÉRATIONS

**DÉFINITION 6** – Matrice par blocs

Soient  $(N_1, \dots, N_n) \in (\mathbb{N}^*)^n$  et  $(P_1, \dots, P_p) \in (\mathbb{N}^*)^p$ . On note  $N = \sum_{i=1}^n N_i$  et  $P = \sum_{j=1}^p P_j$ .

On appelle *matrice par blocs de taille*  $N \times P$  à  $n \times p$  blocs toute matrice  $A \in \mathcal{M}_{N,P}(\mathbb{K})$  s'écrivant :

$$A = \begin{pmatrix} A_{1,1} & \cdots & A_{1,p} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n,1} & \cdots & A_{n,p} \end{pmatrix}$$

avec, pour  $i \in [1, n]$  et  $j \in [1, p]$ ,  $A_{i,j} \in \mathcal{M}_{N_i, P_j}(\mathbb{K})$ .

**REMARQUE** Autrement dit, une matrice par blocs est une matrice dans laquelle les coefficients sont des matrices.

Ces sous-matrices sont appelés les blocs et vérifient des conditions de compatibilité de taille.

**DÉFINITION 7** – Matrices diagonales et triangulaires par blocs

- On appelle matrice *diagonale par blocs* toute matrice de la forme :

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & A_n \end{pmatrix}$$

où les blocs  $(A_i)_{1 \leq i \leq n}$  sont des matrices carrées.

- On appelle matrice *triangulaire supérieure par blocs* toute matrice de la forme :

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & \star & \cdots & \star \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \star \\ 0 & \cdots & 0 & A_n \end{pmatrix}$$

où les blocs  $(A_i)_{1 \leq i \leq n}$  sont des matrices carrées.

**PROPOSITION 10** – Opérations sur les matrices par blocs

- **Addition :** Soient A et B deux matrices par blocs de même taille :

$$A = \begin{pmatrix} A_{1,1} & \cdots & A_{1,p} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n,1} & \cdots & A_{n,p} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} B_{1,1} & \cdots & B_{1,p} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ B_{n,1} & \cdots & B_{n,p} \end{pmatrix}$$

On suppose que pour tout  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$  et  $j \in \llbracket 1, p \rrbracket$  les blocs  $A_{i,j}$  et  $B_{i,j}$  sont de même taille. Le calcul de  $C = A + B$  peut alors s'effectuer par blocs, c'est-à-dire que :

$$C = \begin{pmatrix} C_{1,1} & \cdots & C_{1,p} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{n,1} & \cdots & C_{n,p} \end{pmatrix}$$

avec pour tout  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$  et  $j \in \llbracket 1, p \rrbracket$ ,  $C_{i,j} = A_{i,j} + B_{i,j}$ .

- **Produit :** Soient A et B deux matrices par blocs de la forme :

$$A = \begin{pmatrix} A_{1,1} & \cdots & A_{1,p} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n,1} & \cdots & A_{n,p} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} B_{1,1} & \cdots & B_{1,q} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ B_{p,1} & \cdots & B_{p,q} \end{pmatrix}$$

On suppose que pour tout  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ ,  $k \in \llbracket 1, p \rrbracket$  et  $j \in \llbracket 1, q \rrbracket$  le produit  $A_{i,k}B_{k,j}$  peut être réalisé. Le calcul de  $C = AB$  peut alors s'effectuer par blocs, c'est-à-dire que :

$$C = \begin{pmatrix} C_{1,1} & \cdots & C_{1,q} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{n,1} & \cdots & C_{n,q} \end{pmatrix}$$

avec pour tout  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$  et  $j \in \llbracket 1, q \rrbracket$ ,  $C_{i,j} = \sum_{k=1}^p A_{i,k}B_{k,j}$ .

## REMARQUES

- Autrement dit, les opérations sur les matrices par blocs s'effectuent de la même façon que sur les matrices. La différence réside dans le fait que les coefficients ne sont plus des scalaires mais des sous-matrices et que, par conséquent, certaines conditions de compatibilité de taille doivent être vérifiées sur les blocs pour effectuer les opérations souhaitées.
- La multiplication par un scalaire d'une matrice par blocs ne pose aucun problème.

## EXERCICE 5

Soient  $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ ,  $B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$  et  $D \in \mathcal{M}_q(\mathbb{K})$  trois matrices. On introduit la matrice par blocs :

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D \end{pmatrix}$$

Donner une condition nécessaire et suffisante sur les matrices  $A$ ,  $B$  et  $D$  pour que la matrice  $M$  soit inversible. Exprimer alors  $M^{-1}$  sous la forme d'une matrice par blocs.

## II. 3. SOUS-ESPACES STABLES

### DÉFINITION 8 – Sous-espace stable et endomorphisme induit

Soient  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel,  $F$  un sous-espace vectoriel de  $E$  et  $u \in \mathcal{L}(E)$ .

On dit que  $F$  est stable par  $u$  si  $u(F) \subset F$ , c'est-à-dire si :

$$\forall x \in F, \quad u(x) \in F$$

Dans ce cas, on appelle *endomorphisme induit par  $u$  sur  $F$*  l'endomorphisme  $u_F \in \mathcal{L}(F)$  défini par :

$$\begin{aligned} u_F : F &\longrightarrow F \\ x &\longmapsto u(x) \end{aligned}$$

## REMARQUES

- Il est clair que  $u_F$  est bien un endomorphisme de  $F$ .
- $\{0\}$  et  $E$  sont stables par tout endomorphisme  $u \in \mathcal{L}(E)$ .
- Il ne faut pas confondre  $u_F$  qui est un endomorphisme de  $F$  (et qui n'a de sens que si  $F$  est stable par  $u$ ) et  $u|_F$  qui est une application linéaire de  $F$  dans  $E$ .

## EXEMPLES 6

- (1) Déterminer les droites stables par l'endomorphisme  $u : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto (-5x + 3y, 6x - 2y) \in \mathbb{R}^2$ .
- (2) Déterminer les droites stables par l'endomorphisme  $u : f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mapsto f' \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ .

### PROPOSITION 11 – Stabilité du noyau et de l'image

Soient  $u \in \mathcal{L}(E)$  et  $v \in \mathcal{L}(E)$  deux endomorphismes.

Si  $u$  et  $v$  commutent, c'est-à-dire si  $u \circ v = v \circ u$ , alors  $\text{Ker } v$  et  $\text{Im } v$  sont stables par  $u$ .

### PROPOSITION 12 – Traduction matricielle de la stabilité

Soient  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension  $n$ ,  $F$  un sous-espace vectoriel de  $E$  de dimension  $p$  et  $u \in \mathcal{L}(E)$ .

On se donne  $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$  une base adaptée à  $F$ , c'est-à-dire que  $\mathcal{B}_F = (e_1, \dots, e_p)$  est une base de  $F$ .

Alors  $F$  est stable par  $u$  si et seulement si la matrice de  $u$  dans la base de  $\mathcal{B}$  peut s'écrire par blocs sous la forme :

$$M_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D \end{pmatrix}$$

Dans ce cas,  $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$  est la matrice de l'endomorphisme  $u_F$  induit par  $u$  sur  $F$  dans la base  $\mathcal{B}_F$ .



**PROPOSITION 13** – Généralisation à une somme directe

Soient  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie,  $u \in \mathcal{L}(E)$  et  $E_1, \dots, E_p$  une famille de sous-espaces vectoriels de  $E$  tels que :

$$E = \bigoplus_{k=1}^p E_k$$

Alors  $u$  laisse stable  $E_1, \dots, E_p$  si et seulement si sa matrice dans une base  $\mathcal{B} = (\mathcal{B}_1, \dots, \mathcal{B}_p)$  adaptée à cette somme directe est diagonale par blocs :

$$M_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & A_p \end{pmatrix}$$

où, pour  $k \in \llbracket 1, p \rrbracket$ ,  $A_k \in \mathcal{M}_{\dim(E_k)}(\mathbb{K})$  est la matrice de l'endomorphisme  $u_{E_k}$  induit par  $u$  sur  $E_k$  dans la base  $\mathcal{B}_k$  de  $E_k$ .

## II. 4. MATRICES SEMBLABLES

**DÉFINITION 9** – Matrices semblables

Soient  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  et  $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  deux matrices.

On dit que les matrices  $A$  et  $B$  sont *semblables* s'il existe une matrice  $P \in GL_n(\mathbb{K})$  inversible telle que  $B = P^{-1}AP$ .

**REMARQUE** La relation « être semblable » est une relation d'équivalence sur  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ .

**PROPOSITION 14** – Interprétation en termes d'endomorphismes

Soient  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  et  $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  deux matrices.

Alors les matrices  $A$  et  $B$  sont semblables si et seulement si elles représentent un même endomorphisme dans deux bases.

 **EXEMPLE 7**

Montrer que les matrices  $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$  et  $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$  sont semblables.

**PROPOSITION 15** – Matrices semblables et rang

Deux matrices semblables ont même rang.

## II. 5. TRACE D'UNE MATRICE, D'UN ENDOMORPHISME

**DÉFINITION 10** – Trace d'une matrice

Soit  $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  une matrice.

On appelle *trace de la matrice*  $A$  le scalaire noté  $\text{Tr}(A)$  défini par :

$$\text{Tr}(A) = \sum_{i=1}^n a_{i,i}$$

**PROPOSITION 16** – Trace et opérations

- L'application  $A \mapsto \text{Tr}(A)$  est une application linéaire de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  sur  $\mathbb{K}$ .  
Ainsi, si  $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  et  $\lambda \in \mathbb{K}$ ,  $\text{Tr}(\lambda A + B) = \lambda \text{Tr}(A) + \text{Tr}(B)$
- Si  $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ ,  $\text{Tr}(AB) = \text{Tr}(BA)$
- Si  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ ,  $\text{Tr}({}^t A) = \text{Tr}(A)$

**PROPOSITION 17** – Trace et matrices semblables

Deux matrices semblables ont même trace.

**REMARQUE** Deux matrices semblables ont donc même rang et même trace. En revanche, les réciproques sont fausses, c'est-à-dire que deux matrices ayant même rang et/ou même trace ne sont pas forcément semblables.

⚙️ **EXERCICE 8**

1. Montrer que si deux matrices  $A$  et  $B$  de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  sont semblables alors il en est de même des matrices  $\lambda I_n + A$  et  $\lambda I_n + B$  pour  $\lambda \in \mathbb{K}$ .
2. Montrer que les matrices  $A$  et  $B$  suivantes ont même rang, même trace et même déterminant.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Sont-elles semblables?

La proposition précédente rend légitime la définition suivante de la trace d'un endomorphisme.

**DÉFINITION 11** – Trace d'un endomorphisme

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie et  $u \in \mathcal{L}(E)$  un endomorphisme. On appelle *trace de l'endomorphisme  $u$*  la trace de la matrice de  $u$  dans n'importe quelle base de  $E$ .

⚙️ **EXERCICE 9**

Soit  $p \in \mathcal{L}(E)$  un projecteur d'un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel  $E$  de dimension  $n \geq 1$ .  
Montrer que  $\text{Tr}(p) = \text{rg}(p)$ .

### III. COMPLÉMENTS SUR LES DÉTERMINANTS

#### III. 1. DÉTERMINANT D'UNE MATRICE TRIANGULAIRE PAR BLOCS

Pour rappel, le déterminant d'une matrice triangulaire est le produit de ses coefficients diagonaux. Nous allons généraliser ce résultat aux matrices triangulaires par blocs.

**PROPOSITION 18** – Déterminant d'une matrice triangulaire par blocs version  $2 \times 2$

Soient  $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ ,  $B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$  et  $D \in \mathcal{M}_q(\mathbb{K})$ .

On a :

$$\det \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D \end{pmatrix} = \det(A) \det(D)$$

**REMARQUE** Ce résultat peut être généralisé par récurrence aux matrices triangulaires par blocs de taille quelconque.

Si  $M$  est une matrice triangulaire par blocs de la forme :

$$M = \begin{pmatrix} A_1 & \star & \cdots & \star \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \star \\ 0 & \cdots & 0 & A_n \end{pmatrix}$$

où les blocs  $(A_i)_{1 \leq i \leq n}$  sont des matrices carrées, alors :

$$\det(M) = \det(A_1) \times \cdots \times \det(A_n)$$

Bien entendu, le cas d'une matrice triangulaire inférieure par blocs donne le même résultat.

### III. 2. EXEMPLES DE CALCULS DE DÉTERMINANTS

#### PROPOSITION 19 – Déterminant de Vandermonde

Pour  $n \geq 1$ , soit  $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{K}^n$ .

On appelle *déterminant de Vandermonde* relatif à  $(a_1, \dots, a_n)$  le déterminant noté  $V(a_1, \dots, a_n)$  suivant :

$$V(a_1, \dots, a_n) = \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \cdots & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \cdots & a_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \cdots & a_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

On a alors :

$$V(a_1, \dots, a_n) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (a_j - a_i)$$

Ainsi,  $V(a_1, \dots, a_n)$  est non nul si et seulement si les scalaires  $a_1, \dots, a_n$  sont distincts deux à deux.

**REMARQUE** Le déterminant de Vandermonde peut également être présenté sous sa version « transposée », ce qui ne change en rien sa valeur.

#### EXERCICE 10 – Déterminant tridiagonal

Pour  $(a, b, c) \in \mathbb{K}^3$ , on cherche à calculer le déterminant  $D_n$  de taille  $n \geq 1$  suivant :

$$D_n = \begin{vmatrix} a & c & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ b & a & c & \ddots & & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & b & a & c \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & b & a \end{vmatrix}$$

Pour  $n \geq 2$ , on pourra essayer d'exprimer  $D_{n+1}$  en fonction de  $D_n$  et  $D_{n-1}$ .

## IV. FORMES LINÉAIRES ET HYPERPLANS EN DIMENSION FINIE

#### DÉFINITION 12 – Forme linéaire

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel.

On appelle *forme linéaire sur  $E$*  toute application linéaire de  $E$  dans  $\mathbb{K}$ .

 **EXEMPLES 11**

- (1) L'application  $\text{Tr}$  est une forme linéaire sur  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ .
- (2) L'application  $(x_1, \dots, x_n) \mapsto x_1 + \dots + x_n$  est une forme linéaire sur  $\mathbb{K}^n$ .

**REMARQUE** Si  $E$  est de dimension finie, l'espace  $\mathcal{L}(E, \mathbb{K})$  des formes linéaires sur  $E$  est un espace vectoriel de dimension  $\dim(E) \times \dim(\mathbb{K}) = \dim(E)$ .

**DÉFINITION 13** – *Hyperplan*

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel.

On appelle *hyperplan de  $E$*  tout sous-espace vectoriel de  $E$  admettant un supplémentaire de dimension 1.

**PROPOSITION 20** – *Caractérisation d'un hyperplan en dimension finie*

Soient  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie  $n$  et  $H$  un sous-espace vectoriel de  $E$ . Alors  $H$  est un hyperplan de  $E$  si et seulement si  $\dim(H) = n - 1$ .

**REMARQUE** Si  $\dim(E) = 2$ , les hyperplans de  $E$  sont les droites vectorielles de  $E$ ; si  $\dim(E) = 3$ , les hyperplans de  $E$  sont les plans vectoriels de  $E$ .

 **EXEMPLE 12**

Montrer que  $\mathbb{R}_{n-1}[X]$  est un hyperplan de  $\mathbb{R}_n[X]$ .

 **EXERCICE 13**

Soient  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie  $n$  et  $H$  un hyperplan de  $E$ . Si  $a \notin H$ , montrer que  $E = H \oplus \text{Vect}(a)$ .

**PROPOSITION 21** – *Caractérisation d'un hyperplan via les formes linéaires*

Soient  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et  $H$  un sous-espace vectoriel de  $E$ .

Alors  $H$  est un hyperplan de  $E$  si et seulement si  $H$  est le noyau d'une forme linéaire non nulle sur  $E$ .

**REMARQUE** Cette caractérisation est valable en dimension quelconque.

 **EXEMPLES 14**

- (1) L'ensemble  $H = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \text{Tr}(M) = 0\}$  est un hyperplan de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ .
- (2) L'ensemble  $H = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n, x_1 + \dots + x_n = 0\}$  est un hyperplan de  $\mathbb{K}^n$ .
- (3) L'ensemble  $H = \{P \in \mathbb{R}[X], 3P(2) = 2P(1)\}$  est un hyperplan de  $\mathbb{R}[X]$ .

**DÉFINITION 14** – *Équation d'un hyperplan*

Soient  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et  $H$  un hyperplan de  $E$ .

On appelle *équation de l'hyperplan  $H$*  toute égalité de la forme  $\varphi(x) = 0$  où  $\varphi$  est une forme linéaire non nulle sur  $E$  de noyau  $H$ .

**DÉFINITION 15** – *Équation d'un hyperplan dans une base*

Soient  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie  $n$ ,  $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$  une base de  $E$  et  $H$  un hyperplan de  $E$ . On se donne  $\varphi$  une forme linéaire non nulle de  $E$  de noyau  $H$  et on pose :

$$\forall i \in [1, n], \quad a_i = \varphi(e_i) \in \mathbb{K}$$

Alors, si  $x \in E$  se décompose dans la base  $\mathcal{B}$  sous la forme  $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$  on a :

$$\varphi(x) = 0 \iff \sum_{i=1}^n a_i x_i = 0$$

On appelle *équation de l'hyperplan  $H$  dans la base  $\mathcal{B}$*  toute égalité de la forme  $\sum_{i=1}^n a_i x_i = 0$ .

**REMARQUES**

- Cette équation de l'hyperplan  $H$  dépend de la base  $\mathcal{B}$  à travers les coordonnées  $(x_i)$  de  $x$  qui sont données dans la base  $\mathcal{B}$  et à travers les coefficients  $(a_i)$  qui dépendent de  $\varphi$  et de  $\mathcal{B}$ .
- On a  $(a_1, \dots, a_n) \neq (0, \dots, 0)$  puisque  $\varphi$  est non nulle.

**EXEMPLE** En dimension 2, dans la base  $\mathcal{B}$ , toute droite a une équation de la forme :

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 = 0 \quad \text{avec} \quad (a_1, a_2) \neq (0, 0)$$

Réciproquement, toute équation de cette forme définit une droite.

**PROPOSITION 22** – *Formes linéaires proportionnelles*

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et  $\varphi$  une forme linéaire non nulle de  $E$ . Toute forme linéaire  $\psi$  de  $E$  qui s'annule sur  $\text{Ker } \varphi$  est proportionnelle à  $\varphi$ .

**PROPOSITION 23** – *Équations d'un hyperplan*

Deux équations définissent le même hyperplan si et seulement si elles sont proportionnelles.