Lycée Descartes
Tours

DEVOIR À LA MAISON n°1

PSI
2020 – 2021

POUR LE LUNDI 21 SEPTEMBRE

La partie III est facultative.

DEUX OPÉRATIONS SUR LES POLYNÔMES

Dans tout le problème, n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 1 et $\mathbb{R}_n[X]$ est l'ensemble des polynômes à coefficients réels de degré au plus n.

Pour $k \in \mathbb{N}^*$, on note P_k le polynôme X^{k-1}. On rappelle que $\mathbb{R}_n[X]$ est un $\mathbb{R}$−espace vectoriel de dimension $n+1$ dont la famille $(P_k)_{k\in[\![1,n+1]\!]}$ est une base. Pour $P \in \mathbb{R}_n[X]$, on note $\deg(P)$ le degré de P et, lorsque P est non nul, $\mathrm{cd}(P)$ désigne le coefficient dominant de P, c'est-à-dire le coefficient du monôme $X^{\deg(P)}$.

Pour un ensemble E et $f : E \to E$, on définit l'application $f^k : E \to E$ par récurrence sur $k \in \mathbb{N}$ de la façon suivante :

$$f^0 = \mathrm{Id}_E \qquad \text{et} \qquad f^{k+1} = f \circ f^k$$

Si f est bijective, on note f^{-1} la réciproque de f et pour $k \in \mathbb{N}$, on note $f^{-k} = (f^{-1})^k$.

PARTIE I – TRANSLATION

On définit l'endomorphisme τ de $\mathbb{R}_n[X]$ donné par :

$$\begin{array}{rccc} \tau : & \mathbb{R}_n[X] & \to & \mathbb{R}_n[X] \\ & P(X) & \mapsto & P(X+1) \end{array}$$

1. Pour un polynôme non nul $P \in \mathbb{R}_n[X]$, exprimer $\deg(\tau(P))$ et $\mathrm{cd}(\tau(P))$ à l'aide de $\deg(P)$ et $\mathrm{cd}(P)$.
2. Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$. Pour $k \in \mathbb{N}$, donner l'expression de $\tau^k(P)$ en fonction de P.
3. Donner la matrice $M = (M_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n+1}$ de τ dans la base $(P_k)_{k\in[\![1,n+1]\!]}$.
   On exprimera les coefficients $M_{i,j}$ en fonction de i et j.
4. L'application τ est-elle bijective ? Si oui, préciser τ^{-1}.
   L'expression de τ^j trouvée à la question **2.** pour $j \in \mathbb{N}$ est-elle valable pour $j \in \mathbb{Z}$?
5. Que vaut M^{-1} ? Exprimer les coefficients $(M^{-1})_{i,j}$ en fonction de i et j.
6. On se donne une suite réelle $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ et on définit, pour tout entier $k \in \mathbb{N}$:

$$v_k = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} u_j \tag{1}$$

   Déterminer une matrice $Q \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$ telle que

$$\begin{pmatrix} v_0 \\ v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = Q \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}$$

7. En déduire la formule d'inversion suivante, à savoir que pour tout entier $k \in \mathbb{N}$, on a :

$$u_k = \sum_{j=0}^{k} (-1)^{k-j} \binom{k}{j} v_j \tag{2}$$

8. On considère un réel λ et la suite $(u_k = \lambda^k)_{k\in\mathbb{N}}$.
Quelle est la suite $(v_k)_{k\in\mathbb{N}}$ définie par la formule (1) ? Vérifier alors la formule (2).

Partie II – Différence

On définit maintenant l'endomorphisme δ de $\mathbb{R}_n[X]$ tel que $\delta = \tau - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}_n[X]}$:

$$\delta : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_n[X] & \to & \mathbb{R}_n[X] \\ P(X) & \mapsto & P(X+1) - P(X) \end{array}$$

9. Pour un polynôme non constant $P \in \mathbb{R}_n[X]$, exprimer $\deg(\delta(P))$ et $\mathrm{cd}(\delta(P))$ à l'aide de $\deg(P)$ et $\mathrm{cd}(P)$.
10. En déduire le noyau $\mathrm{Ker}(\delta)$ et $\mathrm{Im}(\delta)$ de l'endomorphisme δ.
11. Plus généralement, pour $j \in [\![1, n]\!]$, montrer les égalités suivantes :

$$\mathrm{Ker}(\delta^j) = \mathbb{R}_{j-1}[X] \qquad \text{et} \qquad \mathrm{Im}(\delta^j) = \mathbb{R}_{n-j}[X] \tag{3}$$

12. Pour $k \in \mathbb{N}$ et $P \in \mathbb{R}_n[X]$, exprimer $\delta^k(P)$ en fonction des $\tau^j(P)$ pour $j \in [\![0, k]\!]$.
13. Soit $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$. Montrer que :

$$\sum_{j=0}^{n} (-1)^{n-j} \binom{n}{j} P(j) = 0 \tag{4}$$

14. Dans cette question, on souhaite démontrer qu'il n'existe pas d'application linéaire $u : \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R}_n[X]$ telle que $u \circ u = \delta$. On suppose, par l'absurde, qu'une telle application u existe.

   14.1. Montrer que u et δ^2 commutent.

   14.2. En déduire que $\mathbb{R}_1[X]$ est stable par l'application u, c'est-à-dire que pour tout $P \in \mathbb{R}_1[X]$, on a $u(P) \in \mathbb{R}_1[X]$.

   14.3. Montrer qu'il n'existe pas de matrice $A \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ telle que :

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

   14.4. Conclure.

15. Dans cette question, on cherche tous les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}_n[X]$ stables par l'application δ.

   15.5. Pour P polynôme non nul de degré $d \leqslant n$, montrer que la famille $(P, \delta(P), \ldots, \delta^d(P))$ est libre.
   Quel est l'espace vectoriel engendré par cette famille ?

   15.6. En déduire que si V est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_n[X]$ stable par δ et non réduit à $\{0\}$, il existe un entier $d \in [\![0, n]\!]$ tel que $V = \mathbb{R}_d[X]$.

Partie III – Une famille de polynômes

On considère la famille de polynômes :

$$\begin{cases} H_0 = 1 \\ H_k = \dfrac{1}{k!} \displaystyle\prod_{j=0}^{k-1} (X - j) \quad \text{pour } k \in [\![1, n]\!] \end{cases}$$

Généralités

16. Montrer que la famille $(H_k)_{k\in[\![0,n]\!]}$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.
17. Calculer $\delta(H_0)$ et, pour $k \in [\![1, n]\!]$, exprimer $\delta(H_k)$ à l'aide de H_{k-1}.
18. La matrice M définie à la question **3.** et la matrice M' de taille $n+1$ donnée par :

$$M' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \ldots & \ldots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

sont-elles semblables ?

19. Montrer que, pour $k, \ell \in [\![0, n]\!]$:

$$\delta^k(\mathrm{H}_\ell)(0) = \begin{cases} 1 & \text{si } k = \ell \\ 0 & \text{si } k \neq \ell \end{cases}$$

20. Montrer que, pour tout $\mathrm{P} \in \mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$:

$$\mathrm{P} = \sum_{k=0}^{n} (\delta^k(\mathrm{P}))(0)\mathrm{H}_k$$

Étude d'un exemple

21. Donner les coordonnées du polynômes $\mathrm{X}^3 + 2\mathrm{X}^2 + 5\mathrm{X} + 7$ dans la base $(\mathrm{H}_0, \mathrm{H}_1, \mathrm{H}_2, \mathrm{H}_3)$ de $\mathbb{R}_3[\mathrm{X}]$.

22. En déduire un polynôme $\mathrm{P} \in \mathbb{R}_5[\mathrm{X}]$ tel que :

$$\delta^2(\mathrm{P}) = \mathrm{X}^3 + 2\mathrm{X}^2 + 5\mathrm{X} + 7$$

23. Déterminer les suites réelles $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ telles que

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad u_{k+2} - 2u_{k+1} + u_k = k^3 + 2k^2 + 5k + 7$$

Polynômes à valeurs entières

24. Soit $k \in \mathbb{Z}$. Calculer $\mathrm{H}_n(k)$.
On distinguera trois cas : $k \in [\![0, n-1]\!]$, $k \geqslant n$ et $k < 0$. Pour ce dernier cas, on posera $k = -p$.

25. En déduire que $\mathrm{H}_n(\mathbb{Z}) \subset \mathbb{Z}$, c'est-à-dire que H_n est à valeurs entières sur les entiers.

26. Soit $\mathrm{P} \in \mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$ à valeurs entières sur les entiers. Montrer que $\delta(\mathrm{P})$ est aussi à valeurs entières sur les entiers.

27. Montrer que $\mathrm{P} \in \mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$ est à valeurs entières sur les entiers si et seulement si ses coordonnées dans la base $(\mathrm{H}_k)_{k\in[\![0,n]\!]}$ sont entières.

28. Soit $\mathrm{P} \in \mathbb{R}[\mathrm{X}]$ de degré $d \in \mathbb{N}$. Montrer que si P est à valeurs entières sur les entiers alors $d!\mathrm{P}$ est un polynôme à coefficients entiers. Étudier la réciproque.