Lycée Descartes
Tours

DEVOIR SURVEILLÉ N°1

PSI
2020 – 2021

SAMEDI 12 SEPTEMBRE 2020

DURÉE : 4h00

L'usage d'une calculatrice est interdit pour cette épreuve.
Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.
Le sujet comporte quatre exercices indépendants.

EXERCICE 1 – ÉTUDE D'UNE ÉQUATION FONCTIONNELLE

On cherche à déterminer l'ensemble $\mathscr{E}$ des fonctions φ continues sur $\mathbb{R}$ vérifiant la relation suivante :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad \varphi(x+y) = \varphi(x)\varphi(y) \tag{R}$$

1. Montrer qu'il existe exactement deux fonctions constantes dans $\mathscr{E}$ et les expliciter.

2. Soit φ un élément de $\mathscr{E}$. Montrer que :

$$\varphi(0) = 0 \quad \iff \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad \varphi(x) = 0$$

3. Soit φ un élément de $\mathscr{E}$ vérifiant $\varphi(0) \neq 0$.

3.1. Donner la valeur de $\varphi(0)$ et montrer que $\varphi(x) > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

3.2. Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad \varphi(nx) = \big(\varphi(x)\big)^n$$

3.3. Établir que :

$$\forall m \in \mathbb{N}^*, \quad \varphi(1) = \left(\varphi\left(\frac{1}{m}\right)\right)^m$$

3.4. Déduire des questions précédentes que :

$$\forall (n,m) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*, \quad \varphi\left(\frac{n}{m}\right) = (\varphi(1))^{\frac{n}{m}}$$

3.5. Soit $x \in \mathbb{R}$. Montrer que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $x_n = \lfloor 10^n x \rfloor \, 10^{-n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ converge vers x.
La notation $\lfloor \cdot \rfloor$ désigne la fonction partie entière.

3.6. Conclure que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \varphi(x) = (\varphi(1))^x.$$

4. Décrire l'ensemble $\mathscr{E}$.

EXERCICE 2 – ÉTUDE D'UNE SUITE RÉCURRENTE

On considère la suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = a > 0$ et la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = u_n + u_n^2$$

1. En utilisant sa monotonie, étudier la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

2. On pose, pour tout entier naturel n, $v_n = 2^{-n}\ln(u_n)$.

   2.1. Prouver que l'on a :

$$\forall (n,p)\in\mathbb{N}^2,\quad 0 < v_{n+p+1} - v_{n+p} \leqslant \frac{1}{2^{n+p+1}}\ln\left(1+\frac{1}{u_n}\right)$$

   2.2. En déduire que l'on a, pour tous entiers naturels k et n :

$$0 < v_{n+k+1} - v_n \leqslant \frac{1}{2^n}\ln\left(1+\frac{1}{u_n}\right)$$

   2.3. En utilisant sa monotonie, montrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers une limite L que l'on ne cherchera pas à calculer.

3. On pose alors pour tout entier naturel n, $t_n = e^{2^n \mathrm{L}}$.
   Démontrer que l'on a : $u_n \underset{+\infty}{\sim} t_n$.

4. On pose, pour tout entier naturel n, $s_n = t_n - u_n$.

   4.1. Pour $n\in\mathbb{N}$, trouver une relation entre s_{n+1}, s_n et u_n.

   4.2. Prouver que la suite $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée.

   4.3. Montrer qu'il existe un réel b tel que, lorsque n tend vers $+\infty$, on a :

$$u_n = t_n + b + o(1)$$

Exercice 3 – Calcul de la somme d'une série alternée

On cherche dans cet exercice à calculer la somme S suivante :

$$\mathrm{S} = \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{\ln n}{n}$$

Partie A – Préliminaires

On définit les suites suivantes :

$$\forall n\geqslant 1,\quad u_n = \left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\right) - \ln n \qquad \text{et} \qquad \mathrm{S}_n = \sum_{k=1}^{n}(-1)^k\frac{\ln k}{k}$$

1. Prouver que $u_{n+1} - u_n = \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$ et en déduire la nature de la série $\sum\limits_{n\geqslant 1}(u_{n+1}-u_n)$.

2. En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge.
   Dans la suite, on note γ sa limite.

3. On considère l'application h définie sur $]0,+\infty[$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$\forall t>0,\quad h(t) = \frac{\ln t}{t}$$

   3.1. Déterminer le tableau de variation de h.

   3.2. Justifier les inégalités suivantes :

$$\forall n\geqslant 3,\quad \int_n^{n+1}\frac{\ln t}{t}\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{\ln(n)}{n} \qquad \text{et} \qquad \forall n\geqslant 4,\quad \frac{\ln n}{n} \leqslant \int_{n-1}^{n}\frac{\ln t}{t}\,\mathrm{d}t$$

4. Prouver que les suites $(\mathrm{S}_{2n})_{n\geqslant 1}$ et $(\mathrm{S}_{2n+1})_{n\geqslant 1}$ sont adjacentes et en déduire que la suite $(\mathrm{S}_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente.

   Ainsi la série $\sum\limits_{n\geqslant 1}(-1)^n\frac{\ln n}{n}$ converge et le réel S introduit en début d'exercice est bien défini.

Partie B – Calcul de S

Pour $n \geqslant 1$, on pose :

$$t_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{\ln k}{k} \qquad \text{et} \qquad a_n = t_n - \frac{(\ln n)^2}{2}$$

5. Utiliser la seconde inégalité de **3.2.** pour prouver que la suite $(a_n)_{n\geqslant 3}$ est décroissante.
6. Utiliser la première inégalité de **3.2.** pour prouver que la suite $(a_n)_{n\geqslant 3}$ converge.
7. Montrer que :

$$\forall n \geqslant 3, \quad S_{2n} = t_n - t_{2n} + \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\right) \ln 2$$

   et en déduire une expression de S_{2n} en fonction de a_n, a_{2n} et u_n.
   On pourra séparer les termes d'indices pairs et impaires de S_{2n}.
8. Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} S_{2n}$ en fonction de γ et de $\ln 2$.
   En déduire S.

Exercice 4 – Polynômes et nombres de Bernoulli

Partie A – Étude d'un endomorphisme

Soit n un entier naturel $\geqslant 2$. On note $\mathbb{R}_n[X]$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel formé par l'ensemble des polynômes à coefficients dans $\mathbb{R}$ de degré $\leqslant n$. Pour tout polynôme P dans $\mathbb{R}_n[X]$, on note P' son polynôme dérivé. Dans la suite, on se permettra d'identifier polynômes et fonctions polynomiales.

Pour tout P dans $\mathbb{R}_n[X]$, on note $\psi_n(P)$ l'application de la variable réelle x définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \psi_n(P)(x) = \int_x^{x+1} P(t)\,\mathrm{d}t$$

1. Calculer $\psi_n(X^i)$ pour $i \in \{0, \dots, n\}$.
2. Vérifier que, pour tout P dans $\mathbb{R}_n[X]$, $\psi_n(P)$ est une application polynomiale de degré $\leqslant n$.
3. Démontrer que ψ_n, l'application qui à P dans $\mathbb{R}_n[X]$ associe $\psi_n(P)$, est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.
4. Écrire la matrice de ψ_n sur la base $(1, X, \dots, X^n)$.
5. Démontrer que ψ_n est bijectif.
6. Soit P dans $\mathbb{R}_n[X]$.
   - **6.1.** Justifier qu'il existe un polynôme Q dans $\mathbb{R}_{n+1}[X]$ tel que $Q' = P$.
   - **6.2.** Démontrer que pour tout réel x on a $\psi_n(P)(x) = Q(x+1) - Q(x)$.
   - **6.3.** Démontrer que $\psi_n(P)'$, le polynôme dérivé du polynôme $\psi_n(P)$, vérifie $\psi_n(P)' = \psi_n(P')$.

Partie B – Polynômes et nombres de Bernoulli

7. Démontrer l'existence et l'unicité d'une suite de polynômes $(S_m)_{m\in\mathbb{N}}$ telle que :
   - **(1)** $S_0 = 1$;
   - **(2)** $\forall k \in \mathbb{N}$, $S'_{k+1} = (k+1)S_k$;
   - **(3)** $\forall k \geqslant 1$, $\int_0^1 S_k(t)\,\mathrm{d}t = 0$.
8. Expliciter les polynômes S_1, S_2 et S_3.
9. Pour $k \in \mathbb{N}$, démontrer que S_k est un polynôme unitaire de degré k.
10. Pour $k \geqslant 2$, démontrer l'égalité $S_k(0) = S_k(1)$.

11. Soit $m \in \mathbb{N}$. Démontrer que S_m vérifie l'équation :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad S_m(1-x) = (-1)^m S_m(x)$$

*On pourra utiliser l'unicité de la suite définie par les conditions de la question **7**.*

12. Pour tout entier naturel $k \leqslant n$, démontrer que S_k est l'unique polynôme dans $\mathbb{R}_n[X]$ tel que $\psi_n(S_k)(X) = X^k$.

Dans toute la suite, on note $\sigma_k = S_k(0)$, pour tout entier naturel $k \leqslant n$. Ainsi $\sigma_0 = 1$.

13. Expliciter les valeurs de σ_1, σ_2 et σ_3.

14. On suppose $n \geqslant 3$. Démontrer que $\sigma_k = 0$, pour tout entier naturel impair k tel que $3 \leqslant k \leqslant n$.

15. Soit $n \in \mathbb{N}$. Démontrer l'égalité :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \sigma_k x^{n-k}$$

16. En déduire que pour tout entier $n \geqslant 2$, on a :

$$\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} \sigma_k = 0$$

$\star \quad \star$
$\star$