COMPLÉMENTS SUR LES SÉRIES

T.D. n°2

Exercice 1 ●○○ Étude de séries

Déterminer les natures des séries suivantes :

1. $\sum_{n\geqslant 2} \frac{1}{n^2\ln n}$
2. $\sum_{n\geqslant 2} \frac{\ln n}{n}$
3. $\sum_{n\geqslant 2} \frac{\ln n}{n^2}$
4. $\sum_{n\geqslant 2} \frac{1}{\sqrt{n}\ln n}$
5. $\sum_{n\geqslant 2} \frac{1}{n\ln n}$
6. $\sum_{n\geqslant 1} \frac{\sin(n^2)}{n^2}$
7. $\sum_{n\geqslant 0} \ln\left(\frac{n^2+n+2}{n^2+n+1}\right)$
8. $\sum_{n\geqslant 1} n^{-1-\frac{1}{n}}$
9. $\sum_{n\geqslant 0} \frac{n^n}{e^n n!}$
10. $\sum_{n\geqslant 0} \ln\left(\cos\left(\frac{1}{n}\right)\right)$
11. $\sum_{n\geqslant 0} \frac{1}{2^{\sqrt{n}}}$
12. $\sum_{n\geqslant 0} \frac{(-1)^n n}{n^3+n+1}$
13. $\sum_{n\geqslant 0} (-1)^n\frac{\ln n}{n}$
14. $\sum_{n\geqslant 0} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^{n+1}}$
15. $\sum_{n\geqslant 1} \cos\left(n^2\pi\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)$
16. $\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n^\alpha+(-1)^{n+1}}}$ $(\alpha\in\mathbb{R})$
17. $\sum_{n\geqslant 1} \sqrt[3]{n^3+an}-\sqrt{n^2+3}$ $(a\in\mathbb{R})$
18. $\sum_{n\geqslant 1} \left(n\,\mathrm{sh}\left(\frac{1}{n}\right)\right)^{-n^a}$ $(a\in\mathbb{R})$

Exercice 2 ●○○ Étude de séries et calculs de sommes

Déterminer les natures des séries suivantes et en calculer la somme en cas de convergence :

1. $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n(n+1)}$
2. $\sum_{n\geqslant 2} \left(\frac{1}{\sqrt{n-1}}-\frac{2}{\sqrt{n}}+\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)$
3. $\sum_{n\geqslant 0} \frac{n+1}{n!}$
4. $\sum_{n\geqslant 0} \frac{n^2-2}{n!}$
5. $\sum_{n\geqslant 2} \ln\left(1-\frac{2}{n(n+1)}\right)$
6. $\sum_{n\geqslant 0} \frac{(-1)^n}{2n+1}$

Exercice 3 ●●○ Deux calculs de somme

1. On cherche à calculer la somme suivante :

$$S=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}$$

   a. Pour $n\in\mathbb{N}^*$, établir que :

$$\sum_{k=1}^{2n}\frac{(-1)^{k-1}}{k}=\sum_{k=n+1}^{2n}\frac{1}{k}$$

   On pourra séparer termes pairs et impairs dans le membre de gauche.

   b. Justifier l'existence et donner la valeur de la limite suivante :

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=n+1}^{2n}\frac{1}{k}$$

   c. Conclure quant à la valeur de S.

2. On cherche maintenant à calculer la somme suivante :

$$T = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$$

a. Justifier l'existence de T.

b. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, démontrer que :

$$\sum_{k=1}^{2n} (-1)^k \ln\left(1+\frac{1}{k}\right) = \ln\left(\frac{(2n)!(2n+1)!}{2^{4n}(n!)^4}\right)$$

On pourra séparer termes pairs et impairs dans le membre de gauche.

c. En déduire finalement la valeur de T.

Exercice 4 ●●○ Règle de Raabe – Duhamel

On se donne $\alpha \in \mathbb{R}$ et une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de réels strictement positifs vérifiant :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{\alpha}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

1. On pose $v_n = \ln(n^\alpha u_n)$ pour $n \geqslant 1$.

a. Prouver que :

$$v_{n+1} - v_n = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

b. En déduire que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge.

c. Conclure qu'il existe une constante $A > 0$ telle que :

$$u_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{A}{n^\alpha}$$

2. On va prouver la *formule de Stirling*. Pour ce faire, on définit une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ en posant :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad a_n = \frac{e^n n!}{\sqrt{n}n^n}$$

a. Prouver qu'il existe une constante $C > 0$ telle que $n! \underset{+\infty}{\sim} C\sqrt{n}n^n e^{-n}$.

b. En utilisant les intégrales de Wallis, démontrer que $C = \sqrt{2\pi}$.

3. Pour $a \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{N}$, on pose :

$$\forall n \geqslant 0, \quad w_n = \frac{a(a-1)\cdots(a-n+1)}{n!}$$

Étudier la convergence absolue de la série de terme général w_n.

Exercice 5 ●●○ Termes généraux récurrents

1. On définit une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ en donnant $u_1 > 0$ et :

$$\forall n \geqslant 1, \quad u_{n+1} = \ln\left(1+\frac{u_n}{n}\right)$$

a. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est bien définie et que $u_n > 0$ pour tout $n \geqslant 1$.

b. Établir que :

$$\forall n \geqslant 1, \quad u_{n+1} \leqslant \frac{u_n}{n}$$

c. Pour $\alpha > 0$, en déduire la nature de la série $\sum_{n\geqslant 1} u_n^\alpha$.

2. On définit une nouvelle suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ en posant $u_1 = 1$ et :

$$\forall n \geqslant 1, \quad u_{n+1} = \sqrt{u_n^2 + \frac{1}{n}}$$

a. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est bien définie et que $u_n \geqslant 1$ pour tout $n \geqslant 1$.

b. Exprimer u_n^2 en fonction de $n \geqslant 1$ et de u_1 sous la forme d'une somme et en déduire un équivalent de u_n.

c. En déduire la nature des séries $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{u_n}$ et $\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^n}{u_n}$.

3. On définit enfin une dernière suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en donnant $u_0 > 1$ et :

$$\forall n \geqslant 0, \quad u_{n+1} = u_n^2 - u_n + 1.$$

a. Montrer que $u_n > 1$ pour tout $n \geqslant 0$ puis que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge vers $+\infty$.

b. Exprimer u_n^2 en fonction de $n \geqslant 1$ et de u_1 sous la forme d'une somme et en déduire un équivalent de u_n.

c. Prouver que la série $\sum_{n\geqslant 0} \frac{1}{u_n}$ converge et donner sa somme en fonction de u_0.

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pourra calculer :

$$\frac{1}{u_{n+1} - 1} - \frac{1}{u_n - 1}$$

Exercice 6 ●○○ — Vitesse de convergence ou de divergence

Donner des équivalents lorsque n tend vers $+\infty$ des deux quantités suivantes :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad S_n = \sum_{k=1}^{n} \sqrt{k} \qquad \text{et} \qquad R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$$

Exercice 7 ●●○ — Approximation de la somme d'une série

1. Justifier que les séries suivantes convergent :

$$\sum_{n\geqslant 0} \frac{(-1)^n}{n^3+1} \qquad \text{et} \qquad \sum_{n\geqslant 2} \frac{1}{n(\ln n)^2}$$

2. Donner, sans la calculer, une approximation à 10^{-3} près de leurs sommes; on proposera également un programme `Python` permettant d'obtenir une valeur approchée de cette approximation.

Exercice 8 ●●● — Une transformation d'Abel

Soit $x \in \mathbb{R}$. On définit la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par :

$$S_0 = 0 \qquad \text{et} \qquad \forall n \geqslant 1, \quad S_n = \sum_{k=1}^{n} \sin(kx)$$

1. Simplifier l'expression de S_n lorsque $n \geqslant 1$ et en déduire que la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée.

2. Démontrer que :

$$\forall n \geqslant 2, \quad \sum_{k=1}^{n} \frac{\sin(kx)}{k} = \frac{S_n}{n} + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{S_k}{k(k+1)}$$

3. En déduire la convergence de la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{\sin(nx)}{n}$.

Exercice 9 ●●● Une série dont le terme général est un reste

1. Pour $n \in \mathbb{N}$, justifier l'existence de :

$$\mathrm{R}_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k}$$

2. Si $n \in \mathbb{N}^*$, démontrer que :

$$\mathrm{R}_n + \mathrm{R}_{n-1} = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k(k-1)}$$

3. Déterminer un équivalent de R_n lorsque n tend vers $+\infty$.
4. Donner la nature de la série de terme général R_n.

Exercice 10 ●●● Divergence d'un produit de Cauchy

Pour $n \geqslant 1$, on pose :

$$a_n = b_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$$

1. Justifier que les séries $\sum a_n$ et $\sum b_n$ convergent.
2. Prouver la divergence de leur série produit de Cauchy.