1. A est une matrice complexe, elle est automatiquem^T trigonalisable (χ_A scindé sur $\mathbb{C}$)

2. Il existe $P \in GL_n(\mathbb{C})$ et $T \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ triangulaire (sup) tq $A = PTP^{-1}$

On a alors $A^k = PT^kP^{-1}$, $k \in \mathbb{N}$ (se démontre par récurrence

$$T = \begin{pmatrix} a_1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & a_n \end{pmatrix} \qquad T^2 = \begin{pmatrix} a_1^2 & & ** \\ & \ddots & \\ 0 & & a_n^2 \end{pmatrix}$$

Démontrons le.

On pose $T = (t_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$. On sait que $t_{ij} = 0$ pour $i > j$ (triang. sup). Cherchons T^2

$$(T^2)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} \underbrace{t_{ik}}_{\substack{=0 \\ \text{si } i>k}} \overbrace{t_{kj}}^{=0 \text{ si } k>j} = \sum_{k=i}^{j} t_{ik}\, t_{kj}$$

- Si $i > j$, la somme est vide et $(T^2)_{ij} = 0$
- Si $i = j$, $(T^2)_{ii} = \sum_{k=i}^{i} t_{ik} t_{ki} = t_{ii}^2$

(• Si $i < j$, $(T^2)_{ij} = \sum_{k=1}^{j} t_{ik} t_{kj}$)

On écrit T sous la forme : $T = \begin{pmatrix} \overbrace{\lambda_1 \ \ddots \ \lambda_1}^{m_1} & & & * \\ & \lambda_2 \ \ddots \ \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_p \ \ddots \ \lambda_p \end{pmatrix}$

A est semblable à T donc figure sur la diagonale de T les VP de A avec multiplicité

Par ce qui précède :

$$T^k = \begin{pmatrix} \lambda_1^k & & & ** \\ & \lambda_1^k & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & \underbrace{\lambda_p^k \ \ddots \ \lambda_p^k}_{m_p} \end{pmatrix}$$

A et T sont semblables donc A^k et T^k le sont aussi ($A^k = PT^kP^{-1}$) donc :

$$Tr(A^k) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Tr de 2 matrices semblables sont} =}}{=} Tr(T^k) = \sum_{i=1}^{p} m_i \lambda_i^k$$

3. Si $k \in \mathbb{N}$, on a $\dfrac{Tr(A^{k+1})}{Tr(A^k)} = \dfrac{m_1\lambda_1^{k+1} + \dots + m_p\lambda_p^{k+1}}{m_1\lambda^k + \dots + m_p\lambda_p}$

$$= \frac{\lambda_1^{k+1}\left(m_1 + m_2\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^{k+1} + \dots + m_p\left(\frac{\lambda_p}{\lambda_1}\right)^{k+1}\right)}{\lambda_1^k\left(m_1 + m_2\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^k + \dots + m_p\left(\frac{\lambda_p}{\lambda_1}\right)^k\right)}$$

Si $i \in [\![2, p]\!]$, $\left|\frac{\lambda_i}{\lambda_1}\right| < 1$ car $|\lambda_1| > |\lambda_i|$

Donc $\left(\frac{\lambda_i}{\lambda_1}\right)^k \xrightarrow[k \to +\infty]{} 0$

$$\frac{Tr(A^{k+1})}{Tr(A^k)} \xrightarrow[k \to +\infty]{} \lambda_1 \frac{m_1 + 0 + 0 \dots + 0}{m_1 + 0 + \dots + 0}$$

$$= \lambda_1$$

4.
```
def Produit(M, N):
    R = []
    n = len(M)
    for i in range(n):
        L = []
        for j in range(n):
            S = 0
            for k in range(n):
                S += M[i][k] * N[k][j]
            L += [S]
        R += [L]
    return R

def Puissance(M, k):
    if k == 1:
        return M
    else:
        return Produit(M, Puissance(M, k-1))

def Trace(M):
    trace = 0
    n = len(M)
    for i in range(n):
        trace += M[i][i]
    return trace
```