③ Diagonalisable ?

$\dim E_1 + \dim E_2 = 2 < 3$

Non diagonalisable

Exercice 14 : TD 1

1. On a $x \mapsto 1-x^2$ de classe C^∞ sur $]-1,1[$ est à valeur dans $]0,1]$ et $x \mapsto \sqrt{x}$ C^∞ sur $]0,1]$ à valeurs dans $\mathbb{R}_*^+$ à valeurs ds $\mathbb{R}$

Par composée, f est C^∞ sur $]-1,1[$

2. On a, pour $x \in]-1,1[$

$$f'(x) = -\frac{(\sqrt{1-x^2})'}{(\sqrt{1-x^2})^2} = -\frac{\frac{(1-x^2)'}{2\sqrt{1-x^2}}}{1-x^2} = \frac{x}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}$$

Ainsi $f'(x) = \dfrac{x}{1-x^2} f(x)$

et $\underbrace{(1-x^2)}_{p(x)} f'(x) \underbrace{-x}_{q(x)} f(x) = 0$

3. $p(x)f'(x) + q(x)f(x) = 0$

On dérive n fois : $(pf' + qf)^{(n)} = 0$

$\Leftrightarrow (pf')^{(n)} + (qf)^{(n)}$

$$\Leftrightarrow \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \underbrace{p^{(k)}}_{\substack{=0 \\ \text{si } k \geq 3 \\ (\deg p = 2)}} (f')^{(n-k)} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \underbrace{q^{(k)}}_{\substack{=0 \text{ si } k \geq 2 \\ (\deg q = 1)}} f^{(n-k)} = 0$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{p^{(0)} f^{(n+1)} + np^{(1)} f^{(n)} + \frac{n(n-1)}{2} p^{(2)} f^{(n-1)}} + \underbrace{q^{(0)} f^{(n)} + nq^{(1)} f^{(n-1)}} = 0$$

$\Leftrightarrow \forall x \in]-1,1[$:

$$(1-x^2) f^{(n+1)}(x) - 2nx f^{(n)}(x) - n(n-1) f^{(n-1)}(x) - xf^{(n)}(x) - nf^{(n-1)}(x) = 0$$

$\Leftrightarrow \forall x \in]-1,1[$:

$$(1-x^2) f^{(n+1)}(x) - (2n+1)x f^{(n)}(x) - n^2 f^{(n-1)}(x) = 0$$

4. La relat° précédente en $x = 0$ donne :

$$f^{(n+1)}(0) = n^2 f^{(n-1)}(0)$$

Si $n = 2p+1$, il vient :

$\forall p \in \mathbb{N}^*$, $f^{(2p+2)}(0) = (2p+1)^2 f^{(2p)}(0)$

Ainsi
$$\begin{aligned} f^{(2p)}(0) &= (2p-1)^2 f^{(2p-2)}(0) \\ &= (2p-1)^2 (2p-3)^2 f^{(2p-4)}(0) \\ &= (2p-1)^2 (2p-3)^2 \dots 1^2 f^{(0)}(0) \\ &= \frac{[(2p)!]^2}{[2^p p!]^2} \end{aligned}$$

5. Par récurrence :

(I) Si $n = 0$, on a :

$$\forall x \in]-1,1[, \quad f^{(0)}(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{(1-x^2)^{0+\frac{1}{2}}} = \frac{P_0(x)}{(1-x^2)^{0+\frac{1}{2}}}$$

à condition de poser $P_0(x) = 1$

(H) On suppose :

$$\forall x \in]-1,1[, \quad f^{(n)}(x) = \frac{P_n(x)}{(1-x^2)^{n+\frac{1}{2}}}$$

On a alors, si $x \in]-1,1[$:

$$f^{(n+1)}(x) = (f^{(n)})'(x) = \left(\frac{P_n(x)}{(1-x^2)^{n+\frac{1}{2}}}\right)'$$

$$= \frac{P_n'(x)(1-x^2)^{n+\frac{1}{2}} - (n+\frac{1}{2})(-2x)(1-x^2)^{n-\frac{1}{2}} P_n(x)}{(1-x^2)^{2n+1}}$$

$$= \frac{P_n'(x)(1-x^2)^{n+\frac{1}{2}} + (2n+1)x(1-x^2)^{n-\frac{1}{2}}P_n(x)}{(1-x^2)^{2n+1}}$$

division par $(1-x^2)^{n-\frac{1}{2}}$

$$= \frac{P_n'(x)(1-x^2)^{n+\frac{1}{2}-(n-\frac{1}{2})} + (2n+1)xP_n(x)}{(1-x^2)^{2n+1-(n-\frac{1}{2})}}$$

$$= \frac{P_n'(x)(1-x^2) + (2n+1)xP_n(x)}{(1-x^2)^{n+1+\frac{1}{2}}}$$

$$= \frac{P_{n+1}(x)}{(1-x^2)^{n+1+\frac{1}{2}}} \quad \text{si on pose}$$

$$P_{n+1}(x) = \underbrace{P_n'(x)}_{pol.}\underbrace{(1-x^2)}_{pol.} + \underbrace{(2n+1)x}_{pol.}\underbrace{P_n(x)}_{pol}$$

D'où l'hérédité

6. Avec $\underline{\underline{3}}$ on a : $\forall x \in]-1,1[$:

$$(1-x^2)f^{(n+1)}(x) - (2n+1)xf^{(n)}(x) - n^2f^{(n-1)}(x) = 0$$

Soit $\cancel{(1-x^2)}\dfrac{P_{n+1}(x)}{(1-x^2)^{n+1+\frac{1}{2}}} - (2n+1)x\dfrac{P_n(x)}{(1-x^2)^{n+\frac{1}{2}}} - n^2\dfrac{P_{n-1}(x)}{(1-x^2)^{n-1+\frac{1}{2}}} = 0$

$\times(1-x^2)^{n+\frac{1}{2}}$

Soit $P_{n+1}(x) - (2n+1)xP_n(x) - n^2(1-x^2)P_{n-1}(x) = 0$

Exercice 13 : **TD 1**

$$\sum_{k=1}^{n} ka_kx^{k-1} = 0 \quad , x \in]0,1[$$

On pose $f(x) = \sum_{k=1}^{n} a_kx^k$, $x \in \mathbb{R}$

L'équat° est donc $f'(x) = 0$, $x \in]0,1[$

La fonction f est $\mathcal{C}^0$ sur $[0,1]$ dérivable sur $]0,1[$

avec $f(0) = 0$ et $f(1) = \sum_{k=1}^{n} a_k = 0$

Donc le théorème de Rolle assure qu'il existe $c \in]0,1[$ tq $f'(c) = 0$