DEVOIR À LA MAISON N°2

Pour le lundi 12 octobre

Les questions abordables uniquement par les 5/2 sont indiquées par le symbole ($\star$).

Problème

Dans la suite, E désignera l'espace vectoriel des suites réelles. Toute suite $u \in \mathrm{E}$ pourra être notée sous la forme $u = (u_0, u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots)$ ou sous la forme $u = (u_n)$ ou encore $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Une suite u de E sera dite périodique de période $p \in \mathbb{N}^*$ lorsqu'elle vérifie :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+p} = u_n$$

Partie A

On introduit l'ensemble $\mathscr{S}_0 = \{u \in \mathrm{E},\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} + u_n = 0\}$.

1. Soient les deux suites λ et μ définies par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \lambda_n = \cos\left(n\frac{\pi}{2}\right) \quad \text{et} \quad \mu_n = \sin\left(n\frac{\pi}{2}\right)$$

- **1.1.** Vérifier que λ et μ sont des éléments de $\mathscr{S}_0$.
- **1.2.** Montrer que ces deux suites sont périodiques.

2. Montrer que $\mathscr{S}_0$ est un sous-espace vectoriel de E.

3. Donner une base de $\mathscr{S}_0$ et préciser sa dimension.

4. Soit $u \in \mathscr{S}_0$ non nulle.

- **4.1.** La suite u est-elle convergente ?
- **4.2.** La série $\sum u_n$ de terme général u_n est-elle convergente ?

Partie B

On considère maintenant l'ensemble $\mathscr{S} = \{u \in \mathrm{E},\ \exists a \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} + u_n = 2a\}$, c'est à dire l'ensemble des suites réelles u pour lesquelles il existe une constante réelle a telle que pour tout entier naturel n, on ait $u_{n+2} + u_n = 2a$.

5. On commence par étudier quelques exemples.

- **5.1.** On prend $u_n = (-1)^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Vérifier que $u \notin \mathscr{S}$.
- **5.2.** On prend $u_n = (-1)^{\lfloor n/2 \rfloor}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ où $\lfloor \cdot \rfloor$ désigne la partie entière. Vérifier que $u \in \mathscr{S}$ et préciser la valeur du réel a correspondant.
- **5.3.** On prend $u_n = 5$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Vérifier que $u \in \mathscr{S}$ et préciser la valeur du réel a correspondant.

6. Vérifier que les suites constantes appartiennent à $\mathscr{S}$.

7. Déterminer les suites géométriques appartenant à $\mathscr{S}$.

8. Montrer que $\mathscr{S}$ est un sous-espace vectoriel de E.

9. A-t-on l'inclusion $\mathscr{S} \subset \mathscr{S}_0$? Et l'inclusion $\mathscr{S}_0 \subset \mathscr{S}$?

10. On introduit l'application φ suivante :

$$\varphi : \begin{array}{ccc} \mathscr{S} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ u & \longmapsto & \dfrac{u_0 + u_2}{2} \end{array}$$

Montrer que φ est une forme linéaire sur $\mathscr{S}$ et déterminer son noyau.

11. Soit $v \in \mathrm{E}$ définie par $v_n = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $\mathscr{S} = \mathscr{S}_0 \oplus \mathrm{Vect}(v)$.

12. Soit $u \in \mathscr{S}$. Déterminer alors, pour tout entier naturel n, une expression de u_n en fonction de n.

13. Montrer que tout élément $u \in \mathscr{S}$ est une suite périodique de période 4.

14. Prouver que l'application $\theta : u \in \mathscr{S} \mapsto \theta(u) = (u_0, u_1, u_2) \in \mathbb{R}^3$ est un isomorphisme d'espaces vectoriels.

On note $\mathscr{C} = (\mathrm{I}, \mathrm{J}, \mathrm{K})$ la base de $\mathscr{S}$ obtenue comme image réciproque de la base canonique de $\mathbb{R}^3$ par θ :

$$\theta(\mathrm{I}) = (1,0,0), \quad \theta(\mathrm{J}) = (0,1,0), \quad \theta(\mathrm{K}) = (0,0,1)$$

15. Expliciter les cinq premiers termes de chacune des suites I, J et K.

16. Soient $k \in \mathbb{N}^*$ et $\mathrm{T}_k : u \in \mathrm{E} \mapsto \mathrm{T}_k(u) = w$ définie par $w_n = u_{kn}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

16.1. Vérifier que T_k est un endomorphisme de E.

16.2. Le sous-espace $\mathscr{S}$ est-il stable par T_2 ?

16.3. Le sous-espace $\mathscr{S}$ est-il stable par T_3 ?

16.4. Écrire la matrice, dans la base $\mathscr{C}$ obtenue à la question **10**, de l'endomorphisme τ_3 induit par T_3 sur $\mathscr{S}$.

16.5. ($\star$) L'endomorphisme τ_3 de $\mathscr{S}$ est-il diagonalisable ?

16.6. Reconnaître la nature géométrique de τ_3.

Partie C

Soient $p \geqslant 2$ fixé et l'espace vectoriel $\mathscr{S}_p = \{u \in \mathrm{E},\ \exists a \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+p} + u_n = 2a\}$.

17. Montrer que tout élément de $\mathscr{S}_p$ est périodique de période $2p$.

18. On introduit la matrice suivante :

$$\mathrm{F} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & & \ddots & 1 & 0 \\ -1 & 0 & \dots & \dots & 0 & 2 \\ 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{p+1}(\mathbb{R})$$

18.1. Pour $x \in \mathbb{R}$, calculer le déterminant $\det(x\mathrm{I}_{p+1} - \mathrm{F})$.

18.2. ($\star$) Déterminer les valeurs propres de F.

18.3. F est-elle inversible ?

18.4. ($\star$) F est-elle diagonalisable dans $\mathscr{M}_{p+1}(\mathbb{C})$? Dans $\mathscr{M}_{p+1}(\mathbb{R})$?

19. Prouver que l'application δ suivante :

$$\delta : \begin{array}{ccl} \mathscr{S}_p & \longrightarrow & \mathbb{R}^{p+1} \\ u & \longmapsto & (u_0, u_1, \dots, u_{p-1}, a) \end{array} \qquad \text{où} \qquad a = \frac{u_0 + u_p}{2}$$

est un isomorphisme d'espaces vectoriels.
Quelle est la dimension de $\mathscr{S}_p$?

On note $\mathscr{C}_p$ l'image réciproque de la base canonique de $\mathbb{R}^{p+1}$ par δ.

20. Soit ψ l'application définie par :

$$\psi : \begin{array}{ccc} \mathscr{S}_p & \longrightarrow & \mathscr{S}_p \\ (u_n)_{n\in\mathbb{N}} & \longmapsto & (u_{n+1})_{n\in\mathbb{N}} \end{array}$$

20.1. Vérifier que ψ est un endomorphisme de $\mathscr{S}_p$.

20.2. Sans nouveau calcul, préciser $\psi^{2p} = \psi \circ \cdots \circ \psi$, composée $2p$ fois de l'application ψ.

20.3. Écrire la matrice de ψ dans la base $\mathscr{C}_p$ de $\mathscr{S}_p$.

20.4. ($\star$) Étudier si ψ est diagonalisable.

20.5. ($\star$) Prouver que ψ est bijective et déterminer son inverse ψ^{-1}.