DEVOIR À LA MAISON n°3

Pour le lundi 2 novembre

La partie III est facultative.

Problème

Dans tout ce qui suit, n désigne un entier naturel $\geqslant 2$. On notera $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ (respectivement $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$) l'ensemble des matrices carrées d'ordre n à coefficients réels (respectivement complexes), I_n la matrice unité et O_n la matrice nulle de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ (respectivement de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$). Si $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ (ou $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$), le polynôme caractéristique de A sera noté χ_A.

Partie I – Réduction de matrices de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.

Soit $A \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ une matrice carrée réelle de taille 2.

1. Quelques généralités.

1.1. Montrer que $\chi_A(\lambda) = \lambda^2 - \mathrm{Tr}(A)\lambda + \det(A)$ pour $\lambda \in \mathbb{R}$.

1.2. Montrer que A est diagonalisable dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ si et seulement si :

$$\mathrm{Tr}(A)^2 - 4\det(A) \neq 0 \quad \text{ou} \quad \exists \lambda_0 \in \mathbb{C} \text{ tel que } A = \lambda_0 I_2$$

1.3. Montrer que A est diagonalisable dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ si et seulement si :

$$\mathrm{Tr}(A)^2 - 4\det(A) > 0 \quad \text{ou} \quad \exists \lambda_0 \in \mathbb{R} \text{ tel que } A = \lambda_0 I_2$$

2. Applications. Soit $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ et $(v_k)_{k\in\mathbb{N}}$ deux suites à termes réels définies par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ v_0 = 2 \end{cases} \qquad \text{et} \qquad \forall k \in \mathbb{N}, \quad \begin{cases} u_{k+1} = 4u_k - 2v_k \\ v_{k+1} = u_k + v_k \end{cases}$$

On pose, pour $k \in \mathbb{N}$, $X_k = \begin{pmatrix} u_k \\ v_k \end{pmatrix}$.

2.1. Trouver une matrice A dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telle que, pour tout entier naturel k, on a $X_{k+1} = AX_k$.

2.2. Soit k dans $\mathbb{N}$. Exprimer X_k en fonction de A, X_0 et k.

2.3. Prouver que A est diagonalisable puis déterminer une matrice P de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, inversible telle que :

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = D$$

2.4. Soit k dans $\mathbb{N}$. Exprimer les coefficients de A^k en fonction de k.

2.5. En déduire l'expression de u_k et v_k en fonction de $k \in \mathbb{N}$.

Partie II – Quelques cas plus généraux

3. Le cas $n = 3$. On définit la matrice J par :

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

3.1. Calculer J^2 et J^3 puis, pour k dans $\mathbb{N}$, préciser J^k en fonction de k.

3.2. On note j le nombre complexe égal à $e^{2i\pi/3}$.
Calculer $1 + j + j^2$.

3.3. Déterminer le polynôme caractéristique de J ainsi que ses valeurs propres.

3.4. Déterminer une matrice inversible P de $\mathscr{M}_3(\mathbb{C})$ telle que :

$$\mathrm{J} = \mathrm{P}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & j & 0 \\ 0 & 0 & \overline{j} \end{pmatrix}\mathrm{P}^{-1}$$

Soient trois nombres complexes a, b et c. On pose :

$$\mathrm{A}(a,b,c) = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix}$$

3.5. Exprimer $\mathrm{A}(a,b,c)$ en fonction de a, b, c et des matrices I_3, J et J^2.

3.6. En déduire que $\mathrm{A}(a,b,c)$ est diagonalisable dans $\mathscr{M}_3(\mathbb{C})$ dans une base indépendante du choix des valeurs des complexes a, b et c.

3.7. Préciser les valeurs propres de la matrice $\mathrm{A}(a,b,c)$.

3.8. Exprimer le déterminant de $\mathrm{A}(a,b,c)$ en fonction de a, b, c et du nombre complexe j sous la forme d'un produit.

On pose $\mathrm{E} = \{\mathrm{A}(a,b,c),\ (a,b,c) \in \mathbb{C}^3\}$.

3.9. Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_3(\mathbb{C})$.

3.10. Donner la dimension de E.

4. **Le cas $n \geqslant 3$ quelconque.** Dans cette question, $n \geqslant 3$. On note $e = (e_1, \ldots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{C}^n$ et u l'endomorphisme de $\mathbb{C}^n$ défini par : $u(e_2) = e_1$, $u(e_3) = e_2, \ldots, u(e_n) = e_{n-1}$ et $u(e_1) = e_n$, c'est-à-dire :

$$u(e_1) = e_n \qquad \text{et} \qquad \forall k \in [\![2, n]\!],\quad u(e_k) = e_{k-1}$$

4.1. On note U la matrice de u dans la base canonique e de $\mathbb{C}^n$. Expliciter la matrice U.

4.2. On note ω une racine n-ième de l'unité et x_ω le vecteur de $\mathbb{C}^n$ défini par :

$$x_\omega = \sum_{k=1}^{n} \omega^{k-1} e_k$$

Calculer $u(x_\omega)$ en fonction de ω et de x_ω.

4.3. Montrer que u est diagonalisable. On précisera une base de vecteurs propres pour u.

4.4. Que peut-on dire de u^n ?

5. **Le cas $n = 4$ quelconque.** Dans toute cette partie, on choisit $n = 4$.

5.1. Expliciter U, U^2, U^3, U^4 où U est la matrice définie dans la question précédente.

5.2. On note (a,b,c,d) une famille de 4 complexes et :

$$\mathrm{V} = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ d & a & b & c \\ c & d & a & b \\ b & c & d & a \end{pmatrix}$$

Montrer que V est diagonalisable dans $\mathscr{M}_4(\mathbb{C})$.
Donner une base de vecteurs propres et préciser les valeurs propres de la matrice V en fonction des nombres complexes a, b, c, d et i.

Partie III – Une preuve du théorème de Cayley – Hamilton

Soit A une matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$. On note :

$$\chi_{\mathrm{A}}(\lambda) = \lambda^n - a_{n-1}\lambda^{n-1} - a_{n-2}\lambda^{n-2} - \cdots - a_0$$

le polynôme caractéristique de A. Le but de cette partie est de prouver le théorème de Cayley – Hamilton, soit :

$$\chi_{\mathrm{A}}(\mathrm{A}) = \mathrm{A}^n - a_{n-1}\mathrm{A}^{n-1} - a_{n-2}\mathrm{A}^{n-2} - \cdots - a_0\mathrm{I}_n = \mathrm{O}_n$$

6. Justifier l'existence dune matrice T triangulaire supérieure de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ et d'une matrice P de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ inversible telles que $\mathrm{A} = \mathrm{PTP}^{-1}$.

On note $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ les éléments diagonaux de T. On notera également $\mathrm{E}_1, \ldots, \mathrm{E}_n$ les matrices colonnes des vecteurs de la base canonique de $\mathbb{C}^n$, c'est-à-dire que :

$$\mathrm{E}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \ldots \qquad \mathrm{E}_n = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

7. Montrer que T et A ont le même polynôme caractéristique.

8. Vérifier que :

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!], \quad (\mathrm{T} - \lambda_i \mathrm{I}_n)(\mathrm{T} - \lambda_j \mathrm{I}_n) = (\mathrm{T} - \lambda_j \mathrm{I}_n)(\mathrm{T} - \lambda_i \mathrm{I}_n)$$

9. Montrer que :

$$\forall k \in [\![1,n-1]\!], \quad (\mathrm{T} - \lambda_{k+1} \mathrm{I}_n)\mathrm{E}_{k+1} \in \mathrm{Vect}\{\mathrm{E}_1, \ldots, \mathrm{E}_k\}$$

10. On pose :

$$\forall k \in [\![1,n]\!], \quad \mathrm{M}_k = (\mathrm{T} - \lambda_1 \mathrm{I}_n)(\mathrm{T} - \lambda_2 \mathrm{I}_n) \ldots (\mathrm{T} - \lambda_k \mathrm{I}_n)$$

Pour $k \in [\![1,n]\!]$, montrer que $\mathrm{M}_k \mathrm{E}_k = 0$.
On pourra utiliser un raisonnement par récurrence.

11. En déduire que $\mathrm{M}_n = 0$ et conclure.