Lycée Descartes
Tours

DEVOIR SURVEILLÉ N°2

PSI
2020 – 2021

SAMEDI 3 OCTOBRE 2020

DURÉE : 4h00

L'usage d'une calculatrice est interdit pour cette épreuve.
Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.
Le sujet comporte quatre exercices indépendants.

EXERCICE 1 – ÉTUDE DE QUELQUES SÉRIES

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de réels. On définit alors :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad b_n = n(a_n - a_{n+1}), \qquad \mathrm{A}_n = \sum_{k=1}^{n} a_k \qquad \text{et} \qquad \mathrm{B}_n = \sum_{k=1}^{n} b_k$$

1. Dans cette question, on suppose que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad a_n = \frac{1}{2^{n-1}}$$

1.1. Vérifier que $\sum_{n\geqslant 1} a_n$ converge et calculer sa somme.

1.2. Montrer que la série $\sum_{n\geqslant 1} b_n$ converge et calculer sa somme.

Pour le calcul de la somme, on pourra remarquer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \sum_{k=1}^{n} kx^k = x\mathrm{S}'_n(x) \qquad \textit{où} \qquad \mathrm{S}_n(x) = \sum_{k=1}^{n} x^k$$

2. Dans cette question, on suppose que :

$$a_1 = 0 \qquad \text{et} \qquad \forall n \geqslant 2, \quad a_n = \frac{1}{n\ln n}$$

2.1. Étudier la monotonie et la convergence de la suite $(a_n)_{n\geqslant 2}$.

2.2. Donner la nature de la série $\sum_{n\geqslant 1} a_n$.

2.3. Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} (na_n)$.

2.4. Étudier la nature de la série $\sum_{n\geqslant 1} b_n$.

3. Dans cette question, on suppose que la série $\sum_{n\geqslant 1} a_n$ converge et que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite décroissante de réels positifs.

3.1. Pour tout entier naturel n non nul, on pose :

$$u_n = \sum_{p=n+1}^{2n} a_p$$

Montrer que $na_{2n} \leqslant u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

3.2. En déduire que $\lim\limits_{n\to+\infty} na_{2n} = 0$.

3.3. Démontrer alors que $\lim\limits_{n\to+\infty} na_n = 0$.

3.4. Établir que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \mathrm{B}_n = \mathrm{A}_n - (n+1)\,a_{n+1} + a_{n+1}$$

3.5. Montrer que la série $\sum_{n\geqslant 1} b_n$ converge.

3.6. Étudier si l'égalité suivante est vérifiée :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n$$

4. Dans cette question, on suppose que la série $\sum_{n\geqslant 1} b_n$ converge et que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est positive, décroissante et de limite nulle.

4.1. Vérifier que $\mathrm{B}_n \geqslant \mathrm{A}_m - m a_{n+1}$ pour tout entier $m \in \mathbb{N}^*$ tel que $m \leqslant n$.

4.2. En déduire que la série $\sum_{n\geqslant 1} a_n$ converge.

4.3. Peut-on en déduire l'égalité suivante ?

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n$$

Exercice 2 – Étude d'un reste de série convergente

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose :

$$\mathrm{R}_n = \sum_{p=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{p}$$

1. Pour $n \in \mathbb{N}$, justifier que la série définissant R_n est bien convergente.

2. On cherche à obtenir une nouvelle expression de R_n pour $n \in \mathbb{N}$.

2.1. Prouver que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall \mathrm{N} \geqslant n, \quad \sum_{p=n+1}^{\mathrm{N}} \frac{(-1)^p}{p} = (-1)^{n+1}\int_0^1 \frac{x^n}{1+x}\,\mathrm{d}x \; + \; (-1)^{\mathrm{N}}\int_0^1 \frac{x^{\mathrm{N}}}{1+x}\,\mathrm{d}x$$

On pourra remarquer en le démontrant que :

$$\forall p \geqslant 1, \quad \frac{1}{p} = \int_0^1 x^{p-1}\,\mathrm{d}x$$

2.2. Établir que :

$$\forall \mathrm{N} \in \mathbb{N}, \quad \left|(-1)^{\mathrm{N}}\int_0^1 \frac{x^{\mathrm{N}}}{1+x}\,\mathrm{d}x\right| \leqslant \frac{1}{\mathrm{N}+1}$$

2.3. En déduire que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \mathrm{R}_n = (-1)^{n+1}\int_0^1 \frac{x^n}{1+x}\,\mathrm{d}x$$

3. On cherche à étudier la série de terme général R_n.

3.1. Justifier que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \mathrm{R}_n = \frac{(-1)^{n+1}}{2(n+1)} + \frac{(-1)^{n+1}}{n+1}\int_0^1 \frac{x^{n+1}}{(1+x)^2}\,\mathrm{d}x$$

3.2. Prouver que :

$$\frac{(-1)^{n+1}}{n+1}\int_0^1 \frac{x^{n+1}}{(1+x)^2}\,\mathrm{d}x \; = \; \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

3.3. En déduire la nature de la série $\sum_{n\geqslant 0} \mathrm{R}_n$.

3.4. Déterminer la somme de la série.

EXERCICE 3 – UNE SUITE DÉFINIE PAR UN DÉTERMINANT

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ deux suites de réels strictement positifs. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $a_n = u_n v_n$.
Pour $n \geqslant 1$, on définit le déterminant suivant de taille $(n+1)\times(n+1)$:

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} 1 & -v_1 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ u_1 & 1 & -v_2 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & u_2 & 1 & -v_3 & \ddots & & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & \ddots & -v_n \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & u_n & 1 \end{vmatrix}$$

1. Soient α et β deux réels strictement positifs. Prouver que :

$$(1+\alpha)(1+\beta) \geqslant (1+\alpha+\beta)$$

2. Calculer Δ_1 et Δ_2.

3. Démontrer que :

$$\forall n \geqslant 3, \quad \Delta_n = \Delta_{n-1} + a_n \Delta_{n-2}$$

4. Prouver que la suite $(\Delta_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante.

5. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que :

$$\Delta_n \leqslant \prod_{k=1}^{n} (1+a_k)$$

On pourra utiliser un raisonnement par récurrence.

6. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note :

$$\mathrm{P}_n = \prod_{k=1}^{n} (1+a_k) \qquad \text{et} \qquad \mathrm{S}_n = \sum_{k=1}^{n} \ln(1+a_k)$$

On suppose dans cette question que la série $\sum_{n\geqslant 1} a_n$ converge.

6.1. Prouver que la suite $(\mathrm{P}_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge.

6.2. Que peut-on en déduire pour la suite $(\Delta_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$?

7. On suppose maintenant que la suite $(\Delta_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge.

7.1. Vérifier que $\Delta_n \geqslant 1$ pour tout $n \geqslant 1$.

7.2. Pour tout $n \geqslant 2$, on pose $t_n = \Delta_n - \Delta_{n-1}$. Étudier la nature de la série $\sum_{n\geqslant 2} t_n$.

7.3. Prouver alors que la série $\sum_{n\geqslant 1} a_n$ converge.

8. Quel résultat a-t-on finalement établi ?

EXERCICE 4 – INTERPOLATION POLYNOMIALE

Dans tout l'exercice, n désigne un entier supérieur ou égal à 3. On note $\mathrm{E} = \mathbb{R}_{n-1}[\mathrm{X}]$ et $\mathscr{B} = \left(1, \mathrm{X}, \ldots, \mathrm{X}^{n-1}\right)$ sa base canonique. Soient $a_1, \ldots, a_n$ n réels vérifiant $a_1 < a_2 < \cdots < a_n$.

1. Montrer que l'application $\mathrm{T} : \mathrm{P} \mapsto (\mathrm{P}(a_1), \ldots, \mathrm{P}(a_n))$ est un isomorphisme de E dans $\mathbb{R}^n$.

2. On note $\mathscr{E} = (e_1, \dots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$ et on pose, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $\mathrm{L}_i = \mathrm{T}^{-1}(e_i)$, c'est-à-dire l'unique polynôme dont l'image par T est e_i.
Montrer que $\mathscr{B}' = (\mathrm{L}_1, \dots, \mathrm{L}_n)$ est une base de E puis déterminer les composantes d'un polynôme P quelconque de E dans cette base.

Dans la suite de l'exercice, on note $\mathrm{M} = \left(m_{i,j}\right)_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ la matrice de passage de la base $\mathscr{B}$ à la base $\mathscr{B}'$

3. Dans cette question uniquement, on suppose que $n = 3$, $a_1 = 0$, $a_2 = 1$ et $a_3 = 2$.

3.1. Donner, avec justification, les polynômes L_1, L_2, L_3 et expliciter la matrice M.

3.2. Déterminer une base et la dimension de $\mathrm{Ker}(\mathrm{M} - \mathrm{I}_3)$.

3.3. En déduire tous les polynômes P de $\mathbb{R}_2[\mathrm{X}]$ vérifiant :

$$\mathrm{P}(\mathrm{X}) = \mathrm{P}(0) + \mathrm{P}(1)\mathrm{X} + \mathrm{P}(2)\mathrm{X}^2$$

4. On revient au cas général.

4.1. Montrer que M est inversible. Calculer son inverse.
*On pourra utiliser la question **2.***

4.2. Établir la relation :

$$\sum_{i=1}^{n} \mathrm{L}_i = 1$$

4.3. Montrer que l'on a :

$$\sum_{j=1}^{n} m_{1,j} = 1 \qquad \text{et} \qquad \forall i \in [\![2, n]\!], \quad \sum_{j=1}^{n} m_{i,j} = 0$$

4.4. Lorsque $a_1 = 1$, déterminer la somme des coefficients de chaque colonne de M.

5. Dans cette question, on suppose que $n \geqslant 4$, on pose $a_1 = 0$, $a_2 = 1$ et $a_3 = 2$ et on considère u l'endomorphisme de E défini par :

$$\forall \mathrm{P} \in \mathrm{E}, \quad u(\mathrm{P}) = \mathrm{P}(0)\mathrm{L}_1(\mathrm{X}) + \mathrm{P}(1)\mathrm{L}_2(\mathrm{X}) + \mathrm{P}(2)\mathrm{L}_3(\mathrm{X})$$

5.1. Déterminer $\mathrm{Ker}(u)$ et $\mathrm{Im}(u)$. Sont-ils supplémentaires ?

5.2. **Pour les 5/2 uniquement.** Déterminer les éléments propres de u et caractériser géométriquement u.

⋆ ⋆
⋆