COMPLÉMENTS SUR LES SÉRIES

Quelques corrigés du T.D. n°2

Exercice 9 ••• Une série dont le terme général est un reste

1. Pour $n \in \mathbb{N}$, justifier l'existence de :

$$\mathrm{R}_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k}$$

La série $\sum_{n\geqslant 1} (-1)^n/n$ est une série alternée dont la valeur absolue du terme général décroît et tend vers 0. Par le théorème spécial, elle converge. Ainsi les restes $(\mathrm{R}_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de cette série convergente sont bien définis.

2. Si $n \in \mathbb{N}^*$, démontrer que :

$$\mathrm{R}_n + \mathrm{R}_{n-1} = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k(k-1)}$$

On fixe $n \in \mathbb{N}^*$. On a, avec un changement d'indice $k = \ell - 1$ dans la seconde somme :

$$\begin{aligned}
\mathrm{R}_n + \mathrm{R}_{n-1} &= \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k} + \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k} \\
&= \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k} + \sum_{\ell=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^{\ell-1}}{\ell-1} \\
&= \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k} - \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k-1} \\
&= \sum_{k=n+1}^{+\infty} (-1)^k \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k-1}\right) \\
&= -\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k(k-1)} \\
&= \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k(k-1)}
\end{aligned}$$

3. Déterminer un équivalent de R_n lorsque n tend vers $+\infty$.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on a aussi :

$$\mathrm{R}_{n-1} - \mathrm{R}_n = \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k} - \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k} = \frac{(-1)^n}{n}$$

En faisant la différence de la relation trouvée à la question précédente avec celle ci-dessus, il vient :

$$2\mathrm{R}_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n} + \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k(k-1)}$$

La série $\sum_{n\geqslant 2} (-1)^{n-1}/[n(n-1)]$ est une série alternée dont la valeur absolue du terme général décroît et tend vers 0. Par le théorème spécial, elle converge et on peut majorer son reste de la façon suivante :

$$\left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k(k-1)} \right| \leqslant \left| \frac{(-1)^n}{(n+1)n} \right| = \frac{1}{n(n+1)}$$

On en déduit que :

$$\mathrm{R}_n = \frac{(-1)^{n+1}}{2n} + \frac{1}{2}\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k(k-1)} = \frac{(-1)^{n+1}}{2n} + \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^2}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{(-1)^{n+1}}{2n}$$

4. Donner la nature de la série de terme général R_n.

On reprend l'expression :

$$\mathrm{R}_n = \frac{(-1)^{n+1}}{2n} + \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

La série $\sum_{n\geqslant 1}(-1)^{n+1}/(2n)$ converge en vertu du théorème spécial des séries alternées et la série $\sum_{n\geqslant 1}\mathrm{O}(1/n^2)$ converge absolument par comparaison avec une série de Riemann convergente. Ainsi, par somme, la série $\sum_{n\geqslant 1}\mathrm{R}_n$ est converge.

Exercice 10 ••• — *Divergence d'un produit de Cauchy*

Pour $n \geqslant 1$, on pose :

$$a_n = b_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$$

1. Justifier que les séries $\sum a_n$ et $\sum b_n$ convergent.

Ces deux séries sont alternées et la valeur absolue de leur terme général décroît et tend vers 0 de sorte qu'elles convergent par le théorème spécial des séries alternées.

2. Prouver la divergence de leur série produit de Cauchy.

En posant $a_0 = b_0 = 0$, leur série produit de Cauchy a pour terme général $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ où :

$$\forall n \geqslant 0, \quad c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$$

On obtient facilement $c_0 = a_0 b_0 = 0$ et $c_1 = a_0 b_1 + a_1 b_0 = 0$ et, pour $n \geqslant 2$:

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} = \sum_{k=1}^{n-1} a_k b_{n-k} = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}}\frac{(-1)^{n-k}}{\sqrt{n-k}} = (-1)^n \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{k}\sqrt{n-k}}$$

On obtient alors, pour $n \geqslant 2$:

$$|c_n| = \left|(-1)^n \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{k}\sqrt{n-k}}\right| = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{\underbrace{\sqrt{k}}_{\leqslant\sqrt{n}}\underbrace{\sqrt{n-k}}_{\leqslant\sqrt{n}}} \geqslant \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{n} = \frac{n-1}{n} \geqslant \frac{1}{2}$$

Ainsi le terme général c_n ne tend vers 0 et la série produit de Cauchy $\sum c_n$ diverge grossièrement.