RÉVISIONS D'ALGÈBRE

Quelques corrigés du T.D. n°3

Exercice 6 — *Noyau et image d'un endomorphisme*

Soient E un $\mathbb{K}$−espace vectoriel et $f \in \mathscr{L}(E)$ un endomorphisme de E.

1. Démontrer les deux équivalences suivantes :

A. $\mathrm{Ker}(f^2) = \mathrm{Ker}(f) \iff \mathrm{Ker}(f) \cap \mathrm{Im}(f) = \{0\}$ **B.** $\mathrm{Im}(f^2) = \mathrm{Im}(f) \iff \mathrm{Ker}(f) + \mathrm{Im}(f) = E$

On prouve **A** en détails, l'équivalence **B** se prouvant de façon relativement similaire.

$\Longrightarrow$ On suppose $\mathrm{Ker}(f^2) = \mathrm{Ker}(f)$ et on montre que $\mathrm{Ker}(f) \cap \mathrm{Im}(f) = \{0\}$. Soit donc $x \in \mathrm{Ker}(f) \cap \mathrm{Im}(f)$. On peut écrire $x = f(a)$ avec $a \in E$ puisque $x \in \mathrm{Im}(f)$. Mais comme $x \in \mathrm{Ker}(f)$ on a $f(x) = 0$, ce qui donne $f^2(a) = 0$. Ainsi $a \in \mathrm{Ker}(f^2)$. Mais $\mathrm{Ker}(f^2) = \mathrm{Ker}(f)$ par hypothèse donc $a \in \mathrm{Ker}(f)$. Cela donne $x = f(a) = 0$ comme souhaité.

$\Longleftarrow$ On suppose $\mathrm{Ker}(f) \cap \mathrm{Im}(f) = \{0\}$ et on montre que $\mathrm{Ker}(f^2) = \mathrm{Ker}(f)$. On procède par double inclusion. D'une part, si $x \in \mathrm{Ker}(f)$, on a $f^2(x) = f(f(x)) = f(0) = 0$ de sorte que $x \in \mathrm{Ker}(f^2)$, soit $\mathrm{Ker}(f) \subset \mathrm{Ker}(f^2)$. D'autre part, si $x \in \mathrm{Ker}(f^2)$, on a $f^2(x) = 0$, c'est-à-dire $f(f(x)) = 0$. Cela donne $f(x) \in \mathrm{Ker}(f) \cap \mathrm{Im}(f) = \{0\}$. Ainsi $f(x) = 0$ et $x \in \mathrm{Ker}(f)$. Finalement, on a bien $\mathrm{Ker}(f^2) = \mathrm{Ker}(f)$.

2. Si l'on suppose de plus E de dimension finie, prouver que :

$$\mathrm{Ker}(f) \oplus \mathrm{Im}(f) = E \iff \mathrm{Im}(f^2) = \mathrm{Im}(f) \iff \mathrm{Ker}(f^2) = \mathrm{Ker}(f)$$

Par le cours, étant en dimension finie, on sait que :

$$\begin{aligned} E = \mathrm{Ker}(f) \oplus \mathrm{Im}(f) &\iff E = \mathrm{Ker}(f) + \mathrm{Im}(f) \quad \text{et} \quad \dim(\mathrm{Ker}(f)) + \dim(\mathrm{Im}(f)) = \dim(E) \\ &\iff \mathrm{Ker}(f) \cap \mathrm{Im}(f) = \{0\} \quad \text{et} \quad \dim(\mathrm{Ker}(f)) + \dim(\mathrm{Im}(f)) = \dim(E) \end{aligned}$$

Mais la relation $\dim(\mathrm{Ker}(f)) + \dim(\mathrm{Im}(f)) = \dim(E)$ est toujours vraie d'après le théorème du rang. Ainsi :

$$E = \mathrm{Ker}(f) \oplus \mathrm{Im}(f) \iff E = \mathrm{Ker}(f) + \mathrm{Im}(f) \iff \mathrm{Ker}(f) \cap \mathrm{Im}(f) = \{0\}$$

Avec la question **1**, on obtient alors immédiatement :

$$\mathrm{Ker}(f) \oplus \mathrm{Im}(f) = E \iff \mathrm{Im}(f^2) = \mathrm{Im}(f) \iff \mathrm{Ker}(f^2) = \mathrm{Ker}(f)$$

Exercice 9 — *Une récurrence linéaire d'ordre 3*

On note F l'ensemble des suites réelles $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+3} = 6u_{n+2} - 11u_{n+1} + 6u_n$$

1. Monter que F est un $\mathbb{R}$−espace vectoriel.

La vérification est facile par caractérisation des sous-espaces vectoriels. On prouve que la suite nulle est dans F et que si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont deux suites de F et $\lambda \in \mathbb{R}$ alors $\lambda(u_n)_{n\in\mathbb{N}} + (v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est encore dans F.

2. On introduit l'application :

$$\varphi : \begin{array}{ccc} F & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (u_n)_{n\in\mathbb{N}} & \longmapsto & (u_0, u_1, u_2) \end{array}$$

Démontrer que φ est un isomorphisme d'espaces vectoriels. En déduire la dimension de F.

Voir la preuve de la **Proposition 19** du chapitre de réduction.

3. Déterminer une base de F.
On pourra rechercher les suites géométriques de F.

Soit $q \in \mathbb{R}$. La suite $(q^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dans F si et seulement si elle vérifie :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad q^{n+3} = 6q^{n+2} - 11q^{n+1} + 6q^n$$

Si $q = 0$, la suite est nulle. Sinon, après division par q^n dans la relation précédente, il vient $q^3 = 6q^2 - 11q + 6$. On résout cette équation du troisième degré en la variable q en commençant par remarquer que $q = 1$ est racine évidente. Il vient ensuite $q^3 - 6q^2 + 11q - 6 = (q-1)(q^2 - 5q + 6) = (q-1)(q-2)(q-3)$. Ainsi les suites $(1)_{n\in\mathbb{N}}$, $(2^n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(3^n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont dans F. De plus, ces trois suites forment une famille libre puisque si $a + b2^n + c3^n = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, on obtient facilement $a = b = c = 0$ en évaluant en $n \in \{0,1,2\}$. Enfin, comme $\dim \mathrm{F} = 3$ d'après la question **2**, on conclut que ces trois suites forment une base de F.

4. Trouver toutes les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de F vérifiant $u_0 = 2$, $u_1 = 1$ et $u_2 = 3$.

La question précédente assure que toute suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de F s'écrit $u_n = a + b2^n + c3^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ avec $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$. En utilisant les conditions initiales $u_0 = 2$, $u_1 = 1$ et $u_2 = 3$, on peut déterminer a, b et c. On trouve après résolution que $u_n = 5 - 5\cdot 2^n + 2\cdot 3^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 10 — *Endomorphismes nilpotents en dimension 3*

Soient E un $\mathbb{R}$−espace vectoriel de dimension 3 et $f \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$ un endomorphisme de E.

1. Prouver que $f^2 = 0$ si et seulement si $\mathrm{Im}(f) \subset \mathrm{Ker}(f)$.

Traité en classe.

2. On suppose dans cette question que $f \neq 0$ et $f^2 = 0$.

   a. Grâce à la question précédente, donner la dimension du noyau et de l'image de f.
   Traité en classe.

   b. Montrer qu'il existe une base de E dans laquelle l'endomorphisme f a pour matrice :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

   Traité en classe.

3. On suppose maintenant que $f^2 \neq 0$ et $f^3 = 0$.

   a. Montrer qu'il existe une base de E dans laquelle l'endomorphisme f a pour matrice :

$$\mathrm{N} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

   Comme $f^2 \neq 0$, on peut se donner $x \in \mathrm{E}$ tel que $f^2(x) \neq 0$. On pose alors $\mathscr{F} = (f^2(x), f(x), x)$. On va prouver que cette famille est libre. Soit $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ tel que $af^2(x) + bf(x) + cx = 0$. En appliquant f^2 à cette relation et en se servant du fait que $f^3 = 0$, il vient $cf^2(x) = 0$. Comme $f^2(x) \neq 0$, cela donne $c = 0$. On a alors $af^2(x) + bf(x) = 0$. En appliquant f il vient $bf^2(x) = 0$ et donc $b = 0$. Enfin, il reste $af^2(x) = 0$ et donc $a = 0$. La famille $\mathscr{F}$ est donc libre et, étant de cardinal $3 = \dim \mathrm{E}$, c'est une base de E. Enfin, on vérifie facilement que la matrice de f dans la base $\mathscr{F}$ est bien N.

   b. On introduit le commutant $\mathrm{C_N}$ de N en posant $\mathrm{C_N} = \{\mathrm{M} \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R}),\ \ \mathrm{MN} = \mathrm{NM}\}$.
   Prouver que $\mathrm{C_N} = \mathrm{Vect}(\mathrm{I}_3, \mathrm{N}, \mathrm{N}^2)$.
   On se donne :

$$\mathrm{M} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$$

On a alors :

$$\begin{aligned}
\mathrm{M} \in \mathrm{C_N} \quad \Longleftrightarrow \quad \mathrm{MN} = \mathrm{NM} \quad &\Longleftrightarrow \quad \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & d & e \\ 0 & g & h \end{pmatrix}}_{=\mathrm{MN}} = \underbrace{\begin{pmatrix} d & e & f \\ g & h & i \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{=\mathrm{NM}} \\
&\Longleftrightarrow \quad \begin{cases} d = 0 \\ a = e \\ b = f \\ g = 0 \\ d = h \\ e = i \\ g = 0 \\ h = 0 \end{cases} \\
&\Longleftrightarrow \quad \mathrm{M} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} \\
&\Longleftrightarrow \quad \mathrm{M} = a \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{=\mathrm{I_3}} + b \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{=\mathrm{N}} + c \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{=\mathrm{N}^2} \\
&\Longleftrightarrow \quad \mathrm{M} \in \mathrm{Vect}(\mathrm{I_3}, \mathrm{N}, \mathrm{N}^2)
\end{aligned}$$

Exercice 12 — *Projecteurs et symétries*

Soit E un $\mathbb{K}-$espace vectoriel. On rappelle les définitions suivantes :

Définition 1

Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E tels que $\mathrm{E} = \mathrm{F} \oplus \mathrm{G}$.

- On appelle *projection sur* F *parallèlement à* G l'unique endomorphisme p de E tel que :

$$\forall x \in \mathrm{F}, \quad p(x) = x \quad \text{et} \quad \forall x \in \mathrm{G}, \quad p(x) = 0$$

- On appelle *symétrie par rapport à* F *parallèlement à* G l'unique endomorphisme s de E tel que :

$$\forall x \in \mathrm{F}, \quad s(x) = x \quad \text{et} \quad \forall x \in \mathrm{G}, \quad s(x) = -x$$

1. On commence par redémontrer deux résultats importants concernant les projecteurs et les symétries.

a. Montrer que $p \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$ est un projecteur si et seulement si $p^2 = p$.
Dans ce cas, prouver que $\mathrm{E} = \mathrm{Im}\, p \oplus \mathrm{Ker}\, p$ et que p est la projection sur $\mathrm{Im}\, p$ parallèlement à $\mathrm{Ker}\, p$.
Voir **Exercice 9** du cours de compléments d'algèbre.

b. Montrer que $s \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$ est une symétrie si et seulement si $s^2 = \mathrm{id_E}$.
Dans ce cas, prouver que $\mathrm{E} = \mathrm{Ker}(s - \mathrm{id_E}) \oplus \mathrm{Ker}(s + \mathrm{id_E})$ et que s est la symétrie par rapport à $\mathrm{Ker}(s - \mathrm{id_E})$ parallèlement à $\mathrm{Ker}(s + \mathrm{id_E})$.
Méthode similaire à la question précédente.

2. Soient p et q deux projecteurs de E.

a. Montrer que $p + q$ est un projecteur si et seulement si $p \circ q = q \circ p = 0$.
On procède par double-implication.

- $\Longrightarrow$ On suppose que $p+q$ est un projecteur. On a donc $(p+q)^2 = p+q$. Cela donne, en développant, la relation $p^2 + p\circ q + q\circ p + q^2 = p+q$. Comme p et q sont des projecteurs on a $p^2 = p$ et $q^2 = q$ et il vient donc $p\circ q + q\circ p = 0 \quad (\star)$. En composant par p à droite dans $(\star)$ et en utilisant $p^2 = p$, il vient $p\circ q\circ p + q\circ p = 0$. En composant par p à gauche dans $(\star)$ et en utilisant $p^2 = p$, il vient $p\circ q + p\circ q\circ p = 0$. On obtient alors $p\circ q = -p\circ q\circ p = q\circ p$. En injectant ce résultat dans $(\star)$ il vient $2q\circ p = 0$ et donc $q\circ p = 0$. $(\star)$ donne alors également $p\circ q = 0$.
- $\Longleftarrow$ Réciproquement, si $p\circ q = q\circ p = 0$ alors on a $(p+q)^2 = p^2 + p\circ q + q\circ p + q^2 = p^2 + q^2 = p+q$ puisque p et q sont des projecteurs. On a donc $(p+q)^2 = p+q$ et $p+q$ est un projecteur.

B. On suppose que $p+q$ est effectivement un projecteur. Prouver que :

$$\mathrm{Im}(p+q) = \mathrm{Im}(p) + \mathrm{Im}(q) \qquad \text{et} \qquad \mathrm{Ker}(p+q) = \mathrm{Ker}(p) \cap \mathrm{Ker}(q)$$

Puisque $p+q$ est supposé être un projecteur, on sait que $p\circ q = q\circ p = 0$ d'après la question précédente. On commence par prouver que $\mathrm{Im}(p+q) = \mathrm{Im}(p) + \mathrm{Im}(q)$ par double-inclusion.

- Si $y \in \mathrm{Im}(p+q)$, on écrit $y = (p+q)(x)$, ce qui donne $y = p(x) + q(x) \in \mathrm{Im}(p) + \mathrm{Im}(q)$. Ainsi on a prouvé que $\mathrm{Im}(p+q) \subset \mathrm{Im}(p) + \mathrm{Im}(q)$.
- Si $y \in \mathrm{Im}(p) + \mathrm{Im}(q)$, on écrit $y = p(a) + q(b)$. On applique p à cette égalité et en utilisant le fait que $p^2 = p$ et $p\circ q = 0$, il vient $p(y) = p(a)$. De même, en appliquant q, il vient $q(y) = q(b)$. Finalement, $y = p(y) + q(y) = (p+q)(y) \in \mathrm{Im}(p+q)$. On a bien montré que $\mathrm{Im}(p) + \mathrm{Im}(q) \subset \mathrm{Im}(p+q)$.

On prouve ensuite que $\mathrm{Ker}(p+q) = \mathrm{Ker}(p) \cap \mathrm{Ker}(q)$ par double-inclusion.

- Si $x \in \mathrm{Ker}(p+q)$, on a $p(x+y) = 0$, c'est-à-dire $p(x) + q(x) = 0$. En appliquant p à cette relation et en utilisant $p^2 = p$ et $p\circ q = 0$, il vient $p(x) = 0$. De même, en appliquant q, il vient $q(x) = 0$. Ainsi $x \in \mathrm{Ker}(p) \cap \mathrm{Ker}(q)$. On a bien montré $\mathrm{Ker}(p+q) \subset \mathrm{Ker}(p) \cap \mathrm{Ker}(q)$.
- Si $x \in \mathrm{Ker}(p) \cap \mathrm{Ker}(q)$ alors $p(x) = q(x) = 0$ et donc $(p+q)(x) = p(x) + q(x) = 0$ de sorte que $x \in \mathrm{Ker}(p+q)$. On a bien montré $\mathrm{Ker}(p) \cap \mathrm{Ker}(q) \subset \mathrm{Ker}(p+q)$.

3. On considère les vecteurs de $\mathbb{R}^3$ suivants :

$$v_1 = (1,1,2), \qquad v_2 = (-2,-1,3) \qquad \text{et} \qquad v_3 = (0,-3,-1)$$

et on pose $\mathrm{F} = \mathrm{Vect}(v_1, v_2)$ et $\mathrm{G} = \mathrm{Vect}(v_3)$.

A. Montrer que $\mathscr{B} = (v_1, v_2, v_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$. Que peut-on dire des sous-espaces F et G ?
On montre facilement que la famille est libre et, étant de cardinal $3 = \dim \mathbb{R}^3$, c'est bien une base de $\mathbb{R}^3$. On peut ensuite prouver que $\mathbb{R}^3 = \mathrm{F} \oplus \mathrm{G}$ en prouvant que $\mathrm{F} \cap \mathrm{G} = \{0\}$ et $\dim \mathbb{R}^3 = \dim \mathrm{F} + \dim \mathrm{G}$.

B. Soit p la projection sur F parallèlement à G. Calculer la matrice M de p dans la base $\mathscr{B}$.
Par définition d'une projection, p vaut l'identité sur F et l'application nulle sur G donc on a $p(v_1) = v_1$, $p(v_2) = v_2$ et $p(v_3) = 0$ de sorte que :

$$\mathrm{M} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

C. En notant $\mathscr{C} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$, donner la matrice N de p dans la base $\mathscr{C}$.
On exprime e_1, e_2 et e_3 en fonction de v_1, v_2 et v_3. On trouve après résolution de trois systèmes :

$$\begin{cases} e_1 &= \frac{1}{2}v_1 - \frac{1}{4}v_2 + \frac{1}{4}v_3 \\ e_2 &= -\frac{1}{10}v_1 - \frac{1}{20}v_2 - \frac{7}{20}v_3 \\ e_3 &= \frac{3}{10}v_1 + \frac{3}{20}v_2 + \frac{1}{20}v_3 \end{cases}$$

Cela permet de calculer $p(e_1)$, $p(e_2)$ et $p(e_3)$ connaissant $p(v_1) = v_1$, $p(v_2) = v_2$ et $p(v_3) = 0$ puis d'exprimer ces vecteurs dans la base canonique $\mathscr{C}$. On trouve alors :

$$\mathrm{N} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{3}{4} & -\frac{1}{20} & \frac{3}{20} \\ \frac{1}{4} & -\frac{7}{20} & \frac{21}{20} \end{pmatrix}$$

D. Donner la matrice de passage P de $\mathscr{C}$ à $\mathscr{B}$ et donner une relation entre M, N et P.
Si P est la matrice de passage de $\mathscr{C}$ à $\mathscr{B}$, on sait par le cours que $M = P^{-1}NP$, ce que l'on pourrait vérifier ici après calcul de P^{-1}.

4. On considère les vecteurs de $\mathbb{R}^3$ suivants :

$$v_1 = (1, -1, -3), \qquad v_2 = (1, 0, 3) \qquad \text{et} \qquad v_3 = (2, -1, 1)$$

et on pose $F = \operatorname{Vect}(v_1)$ et $G = \operatorname{Vect}(v_2, v_3)$.

A. Montrer que $\mathscr{B} = (v_1, v_2, v_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$. Que peut-on dire des sous-espaces F et G ?
Méthode similaire à la question **3**

B. Soit s la symétrie par rapport à F parallèlement à G. Calculer la matrice S de s dans la base $\mathscr{B}$.
Méthode similaire à la question **3**

C. En notant $\mathscr{C} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$, donner la matrice de passage P de $\mathscr{C}$ à $\mathscr{B}$.
Méthode similaire à la question **3**

D. En déduire la matrice T de s dans la base $\mathscr{C}$.
Méthode similaire à la question **3**

Exercice 13 — *Centre de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$*

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on introduit $Z_n(\mathbb{K})$ le centre de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ qui est défini par :

$$Z_n(\mathbb{K}) = \{M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K}),\ \ \forall A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K}),\ \ AM = MA\}$$

Déterminer $Z_n(\mathbb{K})$.
On pourra travailler avec les matrices élémentaires $(E_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant n}}$.

On se donne $M \in Z_n(\mathbb{K})$. On a alors $AM = MA$ pour toute matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. En particulier, on a $E_{i,j}M = ME_{i,j}$ pour tout $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$. En exprimant les matrices $E_{i,j}M$ et $ME_{i,j}$ (voir l'**Exercice 6** du **T.D. 4**) et en identifiant leurs coefficients, on trouve que $m_{i,j} = 0$ dès que $i \neq j$ et que $m_{i,i} = m_{j,j}$ pour tout i, j. Ainsi on a $M = m_{1,1}I_n$. Réciproquement, on peut vérifier que les matrices de la forme λI_n avec $\lambda \in \mathbb{K}$ sont bien dans $Z_n(\mathbb{K})$. Finalement :

$$Z_n(\mathbb{K}) = \{\lambda I_n,\ \lambda \in \mathbb{K}\}$$