COMPLÉMENTS D'ALGÈBRE

T.D. N°4

EXERCICE 1 ●○○ — *Utilisation d'un polynôme annulateur*

On introduit la matrice $A \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 2 \\ -1 & 5 & -2 \\ -1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Trouver un polynôme annulateur de A.

2. En déduire que A est inversible et donner l'expression de A^{-1}.

3. Déterminer les puissances de la matrice A.

EXERCICE 2 ●○○ — *Matrices stochastiques*

On dit qu'une matrice $A = (a_{i,j})$ de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ est *stochastique* si elle vérifie :

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, \quad a_{i,j} \geqslant 0 \qquad \text{et} \qquad \forall i \in [\![1,n]\!], \quad \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} = 1$$

On note $E_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices stochastiques de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

1. L'ensemble $E_n(\mathbb{R})$ est-il un espace vectoriel ?

2. Prouver que si A et B sont deux matrices stochastiques alors AB l'est aussi.

3. Si A et B sont deux matrices stochastiques et si λ et μ sont deux réels positifs vérifiant $\lambda + \mu = 1$, démontrer que la matrice $\lambda A + \mu B$ est stochastique.

4. On note $U \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ le vecteur-colonne dont toutes les coordonnées valent 1. Prouver que $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ est stochastique si et seulement si tous ses coefficients sont positifs et $AU = U$.

EXERCICE 3 ●○○ — *Matrices centro-symétriques*

On dit qu'une matrice $A = (a_{i,j})$ de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est *centro-symétrique* si elle vérifie :

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, \quad a_{n+1-i,n+1-j} = a_{i,j}$$

On note $C_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices stochastiques de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

1. Déterminer toutes les matrices centro-symétriques lorsque $n = 2$ et $n = 3$.

2. Prouver que $C_n(\mathbb{K})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

3. Établir que $C_n(\mathbb{K})$ est stable par multiplication matricielle.

4. Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice centro-symétrique inversible.
En considérant l'application $M \mapsto AM$ de $C_n(\mathbb{K})$ dans lui-même, montrer que A^{-1} est centro-symétrique.

EXERCICE 4 ●●○ — *Équation matricielle*

Soient A et B deux matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Résoudre l'équation suivante d'inconnue $X \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$:

$$X = \mathrm{Tr}(X)A + B$$

Exercice 5 ●●○ — *Propriétés de la trace*

1. On se donne $\varphi : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ une forme linéaire vérifiant :
$$\forall A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \quad \varphi(AB) = \varphi(BA)$$
   Montrer que φ est proportionnelle à la trace.
   On pourra appliquer la relation précédente avec les matrices élémentaires de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
2. À l'aide des matrices élémentaires de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, déterminer une base de $\mathrm{Ker}(\mathrm{Tr})$.

Exercice 6 ●●○ — *Trace d'un endomorphisme*

Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On définit une application φ en posant :
$$\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \quad \varphi(M) = AM - MA$$

1. Vérifier que φ définit un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
2. Donner la matrice de φ dans la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et en déduire $\mathrm{Tr}(\varphi)$.

Exercice 7 ●●○ — *Sous-espaces stables*

Soient E un $\mathbb{K}-$espace vectoriel de dimension $n \geqslant 2$ et $u \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme.

1. On suppose dans cette question que, pour tout vecteur $x \in E$, la famille $(x, u(x))$ est liée.
   - **a.** Justifier que pour tout $x \in E$ il existe un scalaire λ_x tel que $u(x) = \lambda_x x$.
   - **b.** En déduire que u est une homothétie de E (c'est-à-dire qu'il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $u = \lambda\,\mathrm{id}_E$).
     On fixera $x_0 \in E$ non nul et on prouvera que $\alpha_x = \alpha_{x_0}$ pour tout $x \in E$ en s'intéressant à α_{x+x_0}.
2. On suppose que toute droite vectorielle de E est stable par u.
   Montrer que u est une homothétie de E.
3. On suppose que $n \geqslant 3$ et que tout plan vectoriel de E est stable par u.
   - **a.** Montrer que toute droite vectorielle de E peut s'écrire comme l'intersection de deux plans vectoriels de E.
   - **b.** En déduire que u est une homothétie de E.

Exercice 8 ●●○ — *Matrices semblables*

Soit $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ une matrice non nulle vérifiant $A^3 + A = 0$.

1. Montrer que $\mathrm{Im}(A) \subset \mathrm{Ker}(A^2 + I_3)$ et en déduire $\mathrm{Ker}(A^2 + I_3) \neq \{0\}$.
2. Prouver par l'absurde que $\mathrm{Ker}(A) \neq \{0\}$.
3. Conclure que la matrice A est semblable à la matrice B suivante :
$$B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Exercice 9 ●●○ — *Indice de nilpotence*

Soient E un $\mathbb{K}-$espace vectoriel de dimension finie n et u un endomorphisme de E. On suppose que u est nilpotent, c'est-à-dire qu'il existe $s \in \mathbb{N}^*$ tel que $u^s = 0$.
On notera $r \in \mathbb{N}^*$ le plus petit entier vérifiant $u^r = 0$, appelé *indice de nilpotence*.

1. Justifier que $E \setminus \mathrm{Ker}(u^{r-1}) \neq \emptyset$.
2. Si $x \in E \setminus \mathrm{Ker}(u^{r-1})$, montrer que la famille $(x, u(x), \dots, u^{r-1}(x))$ est libre.
3. En déduire que $r \leqslant n$.

Exercice 10 ●●○ — *Un pas vers la diagonalisation*

Soient E un $\mathbb{K}$−espace vectoriel de dimension finie n et u un endomorphisme de E vérifiant $u^3-6u^2+11u-6\,\mathrm{id}_E=0$. On introduit $F_1=\mathrm{Ker}(u-\mathrm{id}_E)$, $F_2=\mathrm{Ker}(u-2\,\mathrm{id}_E)$ et $F_3=\mathrm{Ker}(u-3\,\mathrm{id}_E)$.

1. Pour $x_1\in F_1$ et $k\in\mathbb{N}$, exprimer $u^k(x_1)$ en fonction de x_1 et de k.
2. On se donne $Q\in\mathbb{K}[X]$ et $x=x_1+x_2+x_3$ avec $x_i\in F_i$ pour $i\in\{1,2,3\}$. Prouver que :
$$Q(u)(x)=Q(1)x_1+Q(2)x_2+Q(3)x_3$$
3. En déduire que la somme $F_1+F_2+F_3$ est directe.
4. Prouver que $E=F_1\oplus F_2\oplus F_3$.
On pourra procéder par analyse-synthèse.
5. Exprimer la matrice de u dans une base adaptée à cette décomposition en somme directe.

Exercice 11 ●●○ — *Calculs de déterminants*

1. Calculer, pour $n\in\mathbb{N}^*$, le déterminant de taille $n\times n$ suivant :
$$D_n=\begin{vmatrix}2&1&\cdots&\cdots&1\\1&3&\ddots&&\vdots\\\vdots&\ddots&\ddots&\ddots&\vdots\\\vdots&&\ddots&n&1\\1&\cdots&\cdots&1&n+1\end{vmatrix}$$
On exprimera le résultat en fonction des sommes partielles de la série harmonique.
2. Soit $x\in\mathbb{C}$. Calculer, pour $n\in\mathbb{N}^*$, le déterminant de taille $n\times n$ suivant :
$$D_n(x)=\begin{vmatrix}1+x^2&x&0&\cdots&0\\x&\ddots&\ddots&\ddots&\vdots\\0&\ddots&\ddots&\ddots&0\\\vdots&\ddots&\ddots&\ddots&x\\0&\cdots&0&x&1+x^2\end{vmatrix}$$
3. Calculer, pour $n\in\mathbb{N}^*$, le déterminant suivant :
$$\begin{vmatrix}1&n&n&\cdots&n\\n&2&n&\cdots&n\\n&n&3&\cdots&n\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\n&n&n&\cdots&n\end{vmatrix}$$
4. Soit $A\in\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $\det(A^2+I_n)\geqslant 0$.
On pourra factoriser dans $\mathbb{C}$.
5. Soient $x\in\mathbb{C}$. On va calculer, pour $n\in\mathbb{N}^*$, le déterminant de la matrice $C_n\in\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ suivante :
$$C_n=\begin{pmatrix}a&c&\cdots&\cdots&c\\b&a&\ddots&&\vdots\\\vdots&\ddots&\ddots&\ddots&\vdots\\\vdots&&\ddots&a&c\\b&\cdots&\cdots&b&a\end{pmatrix}$$
   a. On note K_n la matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ dont tous les coefficients sont égaux à 1.
   Montrer que l'application :
   $$P_n : x\mapsto \det(C_n+xK_n)$$
   est un polynôme de degré au plus 1.
   b. En déduire $\det(C_n)$.
6. Soient $n\geqslant 1$ et $(x,a_1,\dots,a_n)\in\mathbb{C}^{n+1}$. Calculer :
$$\begin{vmatrix}x+a_1&a_1&a_1&\cdots&a_1\\a_2&x+a_2&a_2&\cdots&a_2\\a_3&a_3&x+a_3&\cdots&a_3\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\a_n&a_n&a_n&\cdots&x+a_n\end{vmatrix}$$
7. Soient $n\geqslant 2$ et $(a_1,\dots,a_n)\in\mathbb{C}^n$. Calculer :
$$\begin{vmatrix}1&a_1&\cdots&a_1^{n-2}&a_2\cdots a_n\\1&a_2&\cdots&a_2^{n-2}&a_1a_3\cdots a_n\\\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\1&a_n&\cdots&a_n^{n-2}&a_1\cdots a_{n-1}\end{vmatrix}$$

Exercice 12 ●●● — *Écriture d'un sous-espace vectoriel comme intersection d'hyperplans*

Soient E un $\mathbb{K}$− espace vectoriel de dimension finie $n\geqslant 2$ et F un sous-espace vectoriel de E de dimension $1\leqslant p\leqslant n-1$. Montrer que F peut s'écrire comme l'intersection de $n-p$ hyperplans de E.