

QUELQUES CORRIGÉ DU T.D. N°4



EXERCICE 7 ••• Sous-espaces stables

Soient E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension $n \geq 2$ et $u \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme.

1. On suppose dans cette question que, pour tout vecteur $x \in E$, la famille $(x, u(x))$ est liée.

A. Justifier que pour tout $x \in E$ il existe un scalaire λ_x tel que $u(x) = \lambda_x x$.

Puisque $(x, u(x))$ est liée, il existe $(a, b) \neq (0, 0)$ tel que $ax + bu(x) = 0$.

- Si $b \neq 0$ on a alors $u(x) = (-a/b)x$ comme souhaité.
- Si $b = 0$, alors $a \neq 0$ et on a $ax = 0$ soit $x = 0$. Dans ce cas, on peut trivialement écrire que $u(x) = u(0) = 0 = 0 \cdot x$ et on a encore le résultat souhaité.

B. En déduire que u est une homothétie de E (c'est-à-dire qu'il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $u = \lambda \text{id}_E$).

On fixera $x_0 \in E$ non nul et on prouvera que $\alpha_x = \alpha_{x_0}$ pour tout $x \in E$ en s'intéressant à α_{x+x_0} .

On fixe $x_0 \in E$ non nul. On se donne alors $x \in E$ non nul également. Deux cas se présentent :

- Si la famille (x, x_0) est liée, on peut écrire $ax + bx_0 = 0$ avec $(a, b) \neq (0, 0)$. On a forcément $a \neq 0$ car sinon $bx_0 = 0$ avec $b \neq 0$ et $x_0 \neq 0$. On peut donc écrire $x = (-b/a)x_0 = Kx_0$. Il vient alors $u(x) = u(Kx_0) = Ku(x_0) = K\lambda_{x_0}x_0$. Mais on a aussi $u(x) = \lambda_x x = \lambda_x Kx_0$. Ainsi $K\lambda_{x_0}x_0 = \lambda_x Kx_0$. Comme $x_0 \neq 0$ on a $K\lambda_{x_0} = \lambda_x K$. Si $K = 0$ alors $b = 0$ ce qui donnerait $ax = 0$ avec $a \neq 0$ et $x = 0$, c'est exclu. Ainsi $K \neq 0$ et il vient bien $\lambda_{x_0} = \lambda_x$.
- Si la famille (x, x_0) est libre, on a $u(x + x_0) = \lambda_{x+x_0}(x + x_0) = \lambda_{x+x_0}x + \lambda_{x+x_0}x_0$. Mais on a également $u(x + x_0) = u(x) + u(x_0) = \lambda_x x + \lambda_{x_0}x_0$. Ainsi $\lambda_{x+x_0}x + \lambda_{x+x_0}x_0 = \lambda_x x + \lambda_{x_0}x_0$ et par liberté de (x, x_0) il vient $\lambda_x = \lambda_{x+x_0} = \lambda_{x_0}$, ce qui donne ce que l'on souhaitait.

Dans tous les cas, on a bien montré $\lambda_x = \lambda_{x_0}$. Ainsi, on pose $\lambda = \lambda_{x_0}$ et on a prouvé que $u(x) = \lambda x$ pour tout $x \in E$ non nul. Comme $u(0) = 0 = \lambda 0$, cette relation est aussi vérifiée en 0 et u est bien une homothétie.

2. On suppose que toute droite vectorielle de E est stable par u .

Montrer que u est une homothétie de E .

On fixe $x \in E$ non nul. La droite $\text{Vect}(x)$ est stable par u par hypothèse. Cela donne en particulier $u(x) \in \text{Vect}(x)$ et donc $(x, u(x))$ liée. De plus, si $x = 0$, on a clairement $(x, u(x)) = (0, 0)$ qui est liée. Ainsi $(x, u(x))$ est liée pour tout $x \in E$ et la question 1 permet de conclure.

3. On suppose que $n \geq 3$ et que tout plan vectoriel de E est stable par u .

A. Montrer que toute droite vectorielle de E peut s'écrire comme l'intersection de deux plans vectoriels de E .

Soit D une droite vectorielle de E que l'on écrit $D = \text{Vect}(x)$ avec $x \neq 0$. On complète la famille (x) en une base $(x, e_2, e_3, \dots, e_n)$ de E . On pose alors $P_1 = \text{Vect}(x, e_2)$ et $P_2 = \text{Vect}(x, e_3)$, ce qui est possible car $n \geq 3$. On a que P_1 et P_2 sont bien des plans puisque (x, e_2) et (x, e_3) sont libres par construction. Prouvons que $P_1 \cap P_2 = D$. L'inclusion $D \subset P_1 \cap P_2$ est claire. Si $v = ax + be_2 = \alpha x + \beta e_3$ est dans $P_1 \cap P_2$ alors on obtient $(a - \alpha)x + be_2 - \beta e_3 = 0$ et comme (x, e_2, e_3) est libre il vient $a = \alpha$ et $b = \beta = 0$, i.e. $v = ax \in \text{Vect}(x) = D$. D'où $P_1 \cap P_2 = D$.

B. En déduire que u est une homothétie de E .

Soit D une droite vectorielle de E . D'après la question précédente, on peut écrire $D = P_1 \cap P_2$ où P_1 et P_2 sont deux plans. Vérifions alors que D est stable par u . Soit $x \in D$. On a alors $x \in P_1$ et $x \in P_2$. Par stabilité de P_1 et P_2 par u , on a $u(x) \in P_1$ et $u(x) \in P_2$. Cela donne $u(x) \in P_1 \cap P_2 = D$ et D est bien stable par u . On revient donc au contexte de la question 2 et u est ainsi à nouveau une homothétie de E .

EXERCICE 12 ••• Écriture d'un sous-espace vectoriel comme intersection d'hyperplans

Soient E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie $n \geq 2$ et F un sous-espace vectoriel de E de dimension $1 \leq p \leq n-1$. Montrer que F peut s'écrire comme l'intersection de $n-p$ hyperplans de E .

On se donne $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_p, e_{p+1}, \dots, e_n)$ une base de E adaptée à F , c'est-à-dire telle que $\mathcal{B}_F = (e_1, \dots, e_p)$ soit une base de F . Dès lors, $x = \sum_{k=1}^n x_k e_k$ est dans F si et seulement si $x_k = 0$ pour tout $k \in \llbracket p+1, n \rrbracket$. Pour $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on pose :

$$\begin{aligned} \varphi_i : \quad E &\longrightarrow \mathbb{K} \\ \sum_{k=1}^n x_k e_k &\longmapsto x_i \end{aligned}$$

On vérifie facilement que φ_i est une forme linéaire et qu'elle est non nulle puisque $\varphi_i(e_i) = 1 \neq 0$. Par le cours, on a ainsi que les sous-espaces $\text{Ker}(\varphi_i)$ sont des hyperplans de E . Comme $F = \bigcap_{k=p+1}^n \text{Ker}(\varphi_k)$ d'après ce qui précède, F est bien l'intersection de $n - (p+1) + 1 = n - p$ hyperplans de E .