

T.D. N°5



EXERCICE 1 ••• Cas pratiques de diagonalisation

Dans les cas suivants, dire si la matrice est diagonalisable sur \mathbb{K} et la diagonaliser le cas échéant.

$$1. A = \begin{pmatrix} -1 & 6 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -4 & 12 & 5 \end{pmatrix} \quad 2. B = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 5 & 4 & -7 \\ -2 & 2 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad 3. C = \begin{pmatrix} 4 & -3 & -2 \\ 5 & -4 & -2 \\ 5 & -3 & -3 \end{pmatrix} \quad 4. D = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -3 & 5 & -3 \\ -4 & 4 & -3 \end{pmatrix}$$

EXERCICE 2 ••• Diagonalisabilité avec des paramètres

1. Pour $a \in \mathbb{R}$, on pose :

$$M_a = \begin{pmatrix} 3-a & -5+a & a \\ -a & a-2 & a \\ 5 & -5 & -2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$$

Énoncer une condition nécessaire et suffisante pour que la matrice M_a suivante soit diagonalisable

2. On se donne $n \geq 2$ et $(a, b) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}^*$ et on pose :

$$M = \begin{pmatrix} a & & (b) \\ & \ddots & \\ (b) & & a \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$$

Donner les valeurs propres de M et étudier si elle est diagonalisable.

EXERCICE 3 ••• Cas pratique de trigonalisation

On définit la matrice A suivante :

$$A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- Étudier la diagonalisabilité puis la trigonalisabilité de A .
- Montrer que A est semblable à la matrice T suivante :

$$T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

EXERCICE 4 ••• Limite d'une suite matricielle

Si $(M_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est une suite de matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on note $M = \lim_{k \rightarrow +\infty} M_k$ la matrice de coefficients :

$$\forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, \quad M_{i,j} = \lim_{k \rightarrow +\infty} (M_k)_{i,j}$$

sous réserve que toutes ces limites existent.

Déterminer $\lim_{k \rightarrow +\infty} A^k$ lorsque :

$$A = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

EXERCICE 5 ●○○ *Éléments propres d'un endomorphisme sur les polynômes*

Pour $n \geq 1$, on définit l'application Φ suivante :

$$\begin{aligned} \Phi : \mathbb{K}_n[X] &\longrightarrow \mathbb{K}_n[X] \\ P &\longmapsto P - (X+1)P' \end{aligned}$$

1. Montrer que Φ est un endomorphisme de $\mathbb{K}_n[X]$.
2. Justifier que Φ est diagonalisable et donner ses valeurs propres.
On pourra écrire la matrice de Φ dans la base canonique de $\mathbb{K}_n[X]$.

EXERCICE 6 ●●○ *Étude d'une équation matricielle*

On souhaite résoudre l'équation (E) : $M^2 - M = A$ d'inconnue $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ avec :

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}$$

1. Diagonaliser la matrice A en précisant une matrice de passage P .
2. Si $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ est solution de (E), justifier que $P^{-1}MP$ est diagonale.
On pourra vérifier que $P^{-1}MP$ et $P^{-1}AP$ commutent.
3. Donner l'ensemble des solutions de (E).

EXERCICE 7 ●●○ *Étude du commutant d'une matrice*

On souhaite déterminer toutes les matrices $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ qui commutent avec la matrice A suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

1. Diagonaliser la matrice A en précisant une matrice de passage P .
2. En déduire l'ensemble des matrices $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ qui commutent avec A .

EXERCICE 8 ●●○ *Système de suites récurrentes*

On considère trois suites réelles $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifiant :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} x_{n+1} = 2x_n + y_n + z_n \\ y_{n+1} = x_n - y_n + z_n \\ z_{n+1} = x_n + y_n - z_n \end{cases}$$

1. Déterminer l'expression de x_n , y_n et z_n en fonction de $n \in \mathbb{N}$, x_0 , y_0 et z_0 .
On pourra exprimer le système précédent sous forme matricielle.
2. Donner une condition nécessaire et suffisante sur x_0 , y_0 et z_0 pour que ces trois suites convergent.

EXERCICE 9 ●●○ *Manipulation des polynômes annulateurs*

Soient $n \geq 1$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. On suppose que $A^3 + A^2 + A = 0$. Montrer que $\text{rg} A$ est pair et que $\text{Tr} A$ est un entier.
2. On fait l'hypothèse que $2A^3 + 3A^2 - 6A - I_n = 0$. Montrer que A est diagonalisable sur \mathbb{R} .
3. On suppose que $A^3 - 3A - 4I_n = 0$. Prouver que $\det(A) > 0$.
4. Si A vérifie $A^2 - {}^t A = I_n$, prouver que A est diagonalisable.

EXERCICE 10 ●●○ *Matrices nilpotentes*

Une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est dite nilpotente s'il existe un entier $p \geq 1$ tel que $A^p = 0$.

1. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice complexe. Prouver que A est nilpotente si et seulement si $\text{sp}(A) = \{0\}$.
2. On se donne $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice nilpotente. Montrer que $A^n = 0$.
3. Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, déterminer tous les polynômes $P \in \mathbb{C}[X]$ tels que la matrice $P(A)$ soit nilpotente.

EXERCICE 11 ●●○ *Matrices de rang 1*

Montrer qu'une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ de rang 1 est diagonalisable si et seulement si $\text{Tr}(M) \neq 0$.
On pourra commencer par chercher une valeur propre « évidente » de M .

EXERCICE 12 ●●○ *Matrice nilpotente*

Soient $n \geq 1$ et $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $AB - BA = A$.

1. Démontrer que :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad A^k B - B A^k = k A^k$$

2. On définit l'endomorphisme φ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ suivant :

$$\begin{aligned} \varphi : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) &\longrightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \\ M &\longmapsto MB - BM \end{aligned}$$

- a. Soit $k \in \mathbb{N}$. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que la matrice A^k soit valeur propre de φ .
- b. En déduire qu'il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $A^k = 0$.

EXERCICE 13 ●●○ *Diagonalisabilité d'un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$*

Soient $a \in \mathbb{R}$ et $n \geq 2$. On définit l'endomorphisme F de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ suivant :

$$\begin{aligned} F : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) &\longrightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ M &\longmapsto aM + \text{Tr}(M)I_n \end{aligned}$$

1. Déterminer un polynôme annulateur de degré 2 de F .
2. Donner les valeurs propres de F et étudier si F est diagonalisable.
3. En déduire $\det(F)$.

EXERCICE 14 ●●○ *Matrice circulante*

Soient $n \geq 2$ et $(a_0, \dots, a_{n-1}) \in \mathbb{C}^n$. On définit les deux matrices suivantes de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$:

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & & & \ddots & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad A = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} \\ a_{n-1} & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & a_2 \\ a_2 & & \ddots & \ddots & a_1 \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} & a_0 \end{pmatrix}$$

1. Montrer que J est diagonalisable et la diagonaliser.
2. En déduire que A est diagonalisable et la diagonaliser.
3. Calculer $\det A$.

EXERCICE 15 ●●● *Diagonalisabilité d'une matrice par blocs*

Soient $n \geq 1$ et $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant $AB = BA$. On introduit la matrice $M \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$ par blocs suivante :

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & A \end{pmatrix}$$

1. Démontrer que pour tout polynôme P de $\mathbb{R}[X]$ on a :

$$P(M) = \begin{pmatrix} P(A) & P'(A)B \\ 0 & P(A) \end{pmatrix}$$

2. Énoncer une condition nécessaire et suffisante sur A et B pour que M soit diagonalisable.

EXERCICE 16 ●●● *Matrices à coefficients entiers*

Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$ une matrice carrée de taille 2 à coefficients entiers qui vérifie $A^n = I_2$ pour un certain entier $n \in \mathbb{N}^*$. Prouver que l'on a nécessairement $A^{12} = I_2$.

EXERCICE 17 ●●● *Diagonalisation simultanée*

Soient E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie et $u, v \in \mathcal{L}(E)$ deux endomorphismes diagonalisables de E qui commutent, c'est-à-dire que $u \circ v = v \circ u$.

Montrer qu'il existe une base de E dans laquelle les matrices de u et v sont toutes deux diagonales.

On pourra raisonner par récurrence sur la dimension de E