



PLAN DU COURS

I. MODES DE CONVERGENCE D'UNE SUITE DE FONCTIONS	1
I. 1. Convergence simple	1
I. 2. Convergence uniforme	2
II. RÉGULARITÉ DE LA LIMITE D'UNE SUITE DE FONCTIONS	5
II. 1. Limite et continuité	5
II. 2. Intégration	6
II. 3. Dérivation	6
II. 4. Dérivation d'ordre supérieur	7
III. MODES DE CONVERGENCE D'UNE SÉRIE DE FONCTIONS	7
III. 1. Convergences simple et uniforme	7
III. 2. Convergence normale	8
IV. RÉGULARITÉ DE LA SOMME D'UNE SÉRIE DE FONCTIONS	10
IV. 1. Limite et continuité	10
IV. 2. Intégration terme à terme	10
IV. 3. Dérivation terme à terme	10
IV. 4. Dérivation terme à terme d'ordre supérieur	11
IV. 5. Un exemple : la fonction ζ de Riemann	11

Dans la suite, \mathbb{K} désigne \mathbb{R} ou \mathbb{C} et I est un intervalle de \mathbb{R} d'intérieur non vide. On considère dans ce chapitre des suites et séries à valeurs dans le \mathbb{K} -espace vectoriel $\mathcal{F}(I, \mathbb{K})$ des fonctions définies sur I et à valeurs dans \mathbb{K} .

I. MODES DE CONVERGENCE D'UNE SUITE DE FONCTIONS

On introduit dans cette partie différents modes de convergence pour les suites de fonctions à savoir les convergences simple et uniforme.

I. 1. CONVERGENCE SIMPLE

DÉFINITION 1 – Convergence simple

Soient $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions de $\mathcal{F}(I, \mathbb{K})$ et $f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{K})$.

On dit que la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplement vers f si, pour tout $x \in I$, on a $f_n(x) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} f(x)$ dans \mathbb{K} .

VOCABULAIRE

- La fonction limite f est appelée la *limite simple* de la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
- On dit que la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplement s'il existe une fonction $f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{K})$ telle que la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplement vers f .

REMARQUES

- Autrement dit, la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplement vers f si :

$$\forall x \in I, \quad \forall \varepsilon > 0, \quad \exists n_0 \in \mathbb{N}, \quad \forall n \geq n_0, \quad |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon$$

- On dit que la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplement sur $J \subset I$ si la suite $(f_n|_J)_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplement.
- Par unicité de la limite d'une suite à valeurs dans \mathbb{K} , la limite simple, si elle existe, est unique.

EXEMPLES 1

- (1) Étude de la convergence simple de la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ avec :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad f_n : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto x^n$$

- (2) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit la fonction f_n sur \mathbb{R}_+ en posant :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad f_n(x) = \begin{cases} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n & \text{si } x \in [0, n[\\ 0 & \text{si } x \in [n, +\infty[\end{cases}$$

Étude de la convergence simple de la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.

REMARQUES

- Certaines propriétés ne sont pas « stables » par passage à la limite simple. Les deux exemples précédents illustrent le fait qu'une limite simple de fonctions continues n'est pas nécessairement continue et qu'une limite simple de fonctions bornées n'est pas nécessairement bornée.
- Au niveau des opérations algébriques, la convergence simple est stable par combinaison linéaire et produit : si $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ convergent simplement respectivement vers f et g et si $\lambda \in \mathbb{K}$ alors $(\lambda f_n + g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(f_n g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ convergent simplement respectivement vers $\lambda f + g$ et $f g$.

I. 2. CONVERGENCE UNIFORME

DÉFINITION 2 – Convergence uniforme

Soient $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions de $\mathcal{F}(I, \mathbb{K})$ et $f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{K})$.

On dit que la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers f si :

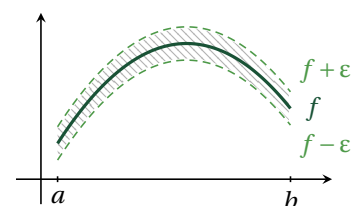
$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists n_0 \in \mathbb{N}, \quad \forall n \geq n_0, \quad \forall x \in I, \quad |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon$$

VOCABULAIRE

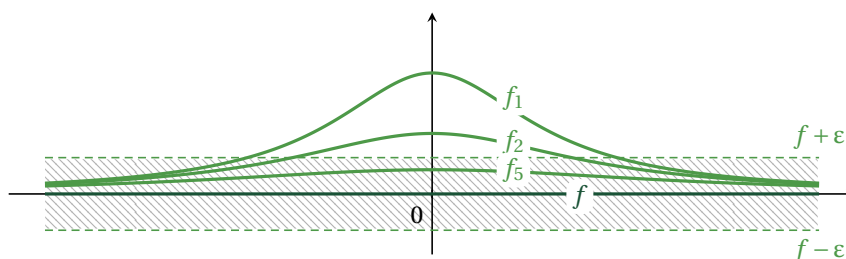
- La fonction limite f est appelée la *limite uniforme* de la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
- On dit que la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément s'il existe une fonction $f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{K})$ telle que la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers f .

REMARQUES

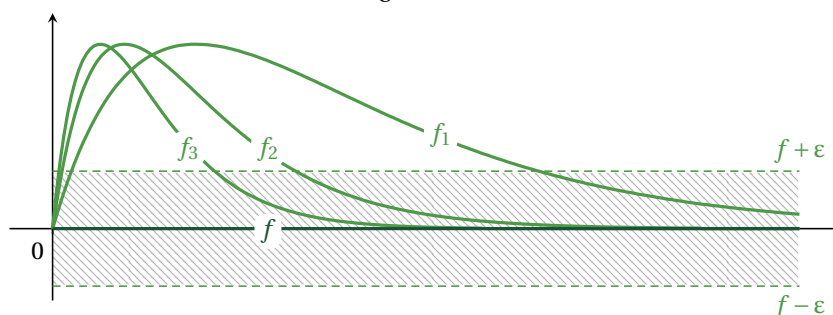
- Le différence entre la convergence simple et la convergence uniforme tient à l'ordre des quantificateurs. Il faut comprendre que pour une convergence simple, le rang n_0 dépend de $x \in I$ alors que pour une convergence uniforme, ce rang n_0 peut être choisi indépendamment de $x \in I$.
- Pour comprendre graphiquement la notion de convergence uniforme, supposons par exemple que la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur un segment $[a, b]$. La définition de la convergence uniforme signifie qu'étant donné $\varepsilon > 0$, il existe un rang n_0 à partir duquel le graphe de toutes les fonctions f_n sont dans le « tube » délimité par les fonctions $f + \varepsilon$ et $f - \varepsilon$.



- Afin de mieux appréhender la différence entre convergence simple et convergence uniforme, on donne ci-après une illustrations de deux cas où il y a convergence simple vers la fonction nulle $f = 0$ de la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$. En revanche, dans le premier cas, il y a convergence uniforme alors que dans le second cas, il n'y a pas convergence uniforme.



Convergence uniforme



Pas de convergence uniforme

- On dit que la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément sur $J \subset I$ si la suite $(f_{n|_J})_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément.

PROPOSITION 1 – Convergence uniforme implique convergence simple

Soient $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions de $\mathcal{F}(I, \mathbb{K})$ et $f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{K})$.

Si $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers f alors $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplement vers f .

REMARQUES 1

- Cela permet de justifier l'unicité de la limite uniforme.
- La réciproque est fautive! Voir plus loin pour un exemple.

PROPOSITION 2 – Condition suffisante de convergence uniforme

Soient $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions de $\mathcal{F}(I, \mathbb{K})$ et $f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{K})$.

Supposons qu'il existe une suite réelle positive $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$ qui tend vers 0 et vérifiant, à partir d'un certain rang, la majoration :

$$\forall x \in I, \quad |f_n(x) - f(x)| \leq \alpha_n$$

Alors la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers f .

REMARQUE – Très important!

La suite $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ne doit pas dépendre de x .

MÉTHODE – Plan d'étude d'une suite de fonctions

(1) **On commence par étudier la convergence simple.**

On fixe donc $x \in I$ et on étudie la convergence de la suite numérique $f_n(x)$. Il faut parfois faire des disjonctions de cas selon les valeurs de x .

(2) **En cas de convergence simple vers f , on poursuit avec l'étude de la convergence uniforme.**

Pour montrer que la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur I , on peut essayer d'utiliser la **PROPOSITION 2**, c'est-à-dire essayer de trouver une suite réelle positive $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$ qui tend vers 0 vérifiant à partir d'un certain rang la majoration :

$$\forall x \in I, \quad |f_n(x) - f(x)| \leq \alpha_n$$

Si ce n'est pas évident directement, et si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, on peut faire une étude de la fonction $|f_n - f|$ pour trouver son maximum sur l'intervalle I et ainsi la majorer.

(3) **Pour montrer que $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ne converge pas uniformément vers f sur I .**

Par négation de la définition de la convergence uniforme, il suffit de trouver une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ à valeurs dans I telle que la suite $(|f_n(x_n) - f(x_n)|)_{n \in \mathbb{N}}$ ne tende pas vers 0.

En l'absence de convergence uniforme sur tout I , on peut parfois établir la convergence uniforme sur des parties $J \subset I$ de I .

 **EXEMPLES 2**

(1) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit la fonction f_n sur \mathbb{R} en posant $f_n(x) = 1/(x^2 + n)$ pour $x \in \mathbb{R}$. Étudier les convergences simple et uniforme de $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ sur \mathbb{R} .

(2) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit la fonction f_n sur \mathbb{R}_+ en posant $f_n(x) = x^2 e^{-nx}$ pour $x \in \mathbb{R}_+$. Étudier les convergences simple et uniforme de $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sur \mathbb{R}_+ .

(3) Pour $n \in \mathbb{N}$, on définit la fonction f_n sur $[0, 1]$ en posant $f_n(x) = x^n$ pour $x \in [0, 1]$. Étudier les convergences simple et uniforme de $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sur $[0, 1]$.

 **EXERCICE 3**

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit la fonction f_n sur $[0, 1]$ en posant $f_n(x) = nx(1-x)^n$ pour $x \in [0, 1]$.

1. Étudier les convergences simple et uniforme de $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sur $[0, 1]$.
2. Prouver qu'il y a convergence uniforme sur tout segment de la forme $[a, 1]$ avec $a \in]0, 1[$. Y a-t-il convergence uniforme sur $]0, 1[$?

REMARQUES – *Opérations sur la convergence uniforme*

- La convergence uniforme est stable par combinaison linéaire : si les suites $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ convergent uniformément respectivement vers f et g et si $\lambda \in \mathbb{K}$ alors $(\lambda f_n + g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers $\lambda f + g$.
- Contrairement à la convergence simple, la convergence uniforme n'est pas stable par produit : la suite de fonctions $(x \mapsto x + 1/n)_{n \in \mathbb{N}}$ définies sur \mathbb{R}_+ converge uniformément vers l'identité sur \mathbb{R}_+ mais son carré se converge pas uniformément.

RAPPEL – *Norme infinie sur $\mathcal{B}(I, \mathbb{K})$*

L'ensemble $\mathcal{B}(I, \mathbb{K})$ des fonctions bornées sur I et à valeurs dans \mathbb{K} est un \mathbb{K} -espace vectoriel que l'on peut munir de la norme dite *de la convergence uniforme* ou *norme infinie* $\|\cdot\|_\infty$ définie par :

$$\forall f \in \mathcal{B}(I, \mathbb{K}), \quad \|f\|_\infty = \sup_{x \in I} |f(x)|$$

PROPOSITION 3 – *Convergence uniforme*

Soient $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions de $\mathcal{F}(I, \mathbb{K})$ et $f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{K})$.

La suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers f si et seulement s'il existe un entier $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout entier $n \geq N$ la fonction $f_n - f$ est bornée et $\|f_n - f\|_\infty \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

PROPOSITION 4 – *Convergence uniforme et norme de la convergence uniforme*

Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions de $\mathcal{B}(I, \mathbb{K})$.

La suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément si et seulement si elle converge dans l'espace vectoriel normé $(\mathcal{B}(I, \mathbb{K}), \|\cdot\|_\infty)$.

II. RÉGULARITÉ DE LA LIMITE D'UNE SUITE DE FONCTIONS

II. 1. LIMITE ET CONTINUITÉ

Nous avons vu qu'une limite simple de fonctions continues n'est pas nécessairement continue. Ce « défaut » est corrigé avec la convergence uniforme.

THÉORÈME 1 – *Continuité d'une limite*

Soient $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions de $\mathcal{F}(I, \mathbb{K})$ et $f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{K})$. On suppose que :

- Les fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont continues sur I ;
- La suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur I (ou sur tout segment de I).

Alors f est continue sur I .

REMARQUES

- Ce théorème peut être utilisé pour montrer qu'une convergence n'est pas uniforme si l'on constate qu'une limite simple de fonctions continues n'est pas continue. On peut repenser à l'exemple de la suite de fonctions $(x \in [0, 1] \mapsto x^n)_{n \in \mathbb{N}}$.
- La continuité de f en a équivaut à $f(x)$ tend vers $f(a)$ lorsque x tend vers a . Le résultat que l'on vient d'énoncer peut donc s'écrire :

$$\lim_{x \rightarrow a} \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \lim_{x \rightarrow a} f_n(x) \quad (\star)$$

ce qui peut s'interpréter comme un résultat d'interversion de limites.

Attention, une interversion de limite n'a absolument rien d'évident ! Par exemple, on a :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \lim_{x \rightarrow 1^-} x^n = 1 \quad \text{alors que} \quad \lim_{x \rightarrow 1^-} \lim_{n \rightarrow +\infty} x^n = 0$$

On se demande maintenant si le résultat d'interversion de limites (\star) peut être étendu au cas où a est une extrémité de I , plus précisément au cas où $a \in \bar{I} \setminus I$ ou $a = \pm\infty$ si I est une demi-droite ou \mathbb{R} entier.

THÉORÈME 2 – *Théorème de la double limite*

Soient $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions de $\mathcal{F}(I, \mathbb{K})$, $f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{K})$ et a une extrémité de I . On suppose que :

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction f_n admet une limite finie ℓ_n en a ;
- La suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur I (ou sur un voisinage de a).

Alors la suite $(\ell_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente, la fonction f admet une limite en a et :

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \ell_n$$

REMARQUE Là encore, ce théorème peut être utilisé pour montrer qu'une convergence n'est pas uniforme. Par exemple, la suite de fonctions $(x \in [0, 1] \mapsto x^n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplement vers la fonction f valant 0 sur $[0, 1[$ et 1 en 1 et la convergence n'est pas uniforme puisque :

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 0 \neq 1 = \lim_{n \rightarrow +\infty} \ell_n \quad \text{avec} \quad \ell_n = \lim_{x \rightarrow 1^-} f_n(x) = 1$$

II. 2. INTÉGRATION

THÉORÈME 3 – Intégration d'une limite

Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions de $\mathcal{F}([a, b], \mathbb{K})$. On suppose que :

- Les fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et f sont continues sur $[a, b]$;
- La suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur $[a, b]$.

Alors :

$$\int_a^b f_n(x) dx \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x) dx$$

REMARQUES

- L'hypothèse f continue sur $[a, b]$ est superflue puisque f est nécessairement continue en tant que limite uniforme de fonctions continues.
- Le résultat précédent peut s'écrire :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b f_n(t) dt = \int_a^b \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(t) dt$$

Il donne ainsi une condition suffisante pour pouvoir intervertir une limite et une intégrale, ce qui n'a rien d'évident *a priori*, comme le montre l'exemple qui suit.

EXEMPLE 4

Pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in [0, 1]$, on pose $f_n(x) = n^2 x^n (1 - x)$. Étudier si la relation suivante est satisfaite :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 f_n(t) dt = \int_0^1 \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(t) dt$$

II. 3. DÉRIVATION

THÉORÈME 4 – Dérivation d'une limite

Soient $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions de $\mathcal{F}(I, \mathbb{K})$ et $f, h \in \mathcal{F}(I, \mathbb{K})$. On suppose que :

- Les fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont de classe \mathcal{C}^1 sur I ;
- La suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplement vers f sur I ;
- La suite $(f'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers h sur I (ou sur tout segment de I).

Alors la fonction f est de classe \mathcal{C}^1 sur I avec $f' = h$.

De plus, la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur tout segment de I .

REMARQUES

- Ce résultat peut également s'écrire :

$$\left(\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n \right)' = \lim_{n \rightarrow +\infty} f'_n$$

et s'apparente donc à une condition suffisante pour pouvoir intervertir une dérivée et une limite, ce qui, encore une fois, n'a rien d'évident *a priori*.

- Si une suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de fonctions de classe \mathcal{C}^1 converge uniformément vers une fonction f alors f n'est pas nécessairement \mathcal{C}^1 comme le montre l'exemple qui suit.

EXEMPLE 5

Pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}_+$, on pose $f_n(x) = \sqrt{x + n^{-1}}$.

Prouver que la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de fonctions de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}_+ qui converge uniformément sur \mathbb{R}_+ vers une fonction qui n'est pas \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}_+ .

II. 4. DÉRIVATION D'ORDRE SUPÉRIEUR

THÉORÈME 5 – Dérivation d'ordre supérieur d'une limite

Pour $k \geq 1$, soient $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions de $\mathcal{F}(I, \mathbb{K})$ et $h_0, \dots, h_k \in \mathcal{F}(I, \mathbb{K})$. On suppose que :

- Les fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont de classe \mathcal{C}^k sur I ;
- Pour tout $j \in \llbracket 0, k-1 \rrbracket$, la suite $(f_n^{(j)})_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplement vers h_j sur I ;
- La suite $(f_n^{(k)})_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers h_k sur I (ou sur tout segment de I).

Alors la limite simple $f = h_0$ de la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est de classe \mathcal{C}^k sur I avec :

$$\forall j \in \llbracket 0, k \rrbracket, \quad f^{(j)} = h_j$$

III. MODES DE CONVERGENCE D'UNE SÉRIE DE FONCTIONS

Nous étudions dans cette partie des séries dont les termes généraux sont des fonctions de $\mathcal{F}(I, \mathbb{K})$. Une série n'étant rien d'autre qu'une suite, nous allons pouvoir nous appuyer sur les deux parties précédentes.

III. 1. CONVERGENCES SIMPLE ET UNIFORME

DÉFINITION 3 – Série de fonctions, convergence simple, convergence uniforme

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions de $\mathcal{F}(I, \mathbb{K})$.

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on appelle *somme partielle d'ordre n* la fonction S_n définie sur I par :

$$\forall x \in I, \quad S_n(x) = \sum_{k=0}^n u_k(x)$$

- On appelle *série de fonctions de terme général u_n* la suite de fonctions $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

On la note $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$, $\sum_{n \geq 0} u_n$ ou $\sum u_n$.

- On dit que la série de fonctions $\sum u_n$ *converge simplement* si, pour tout $x \in I$, la série $\sum u_n(x)$ converge. Dans ce cas, on appelle *somme de la série*, notée S , et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, *reste d'ordre n* , noté R_n , les fonctions définies sur I par :

$$\forall x \in I, \quad S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x) \quad \text{et} \quad R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k(x)$$

- On dit que la série de fonctions $\sum u_n$ *converge uniformément* si la suite de fonctions des sommes partielles $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément.

REMARQUES

- On dit que la série de fonctions $\sum u_n$ *converge simplement* (resp. *uniformément*) sur $J \subset I$ si la série de fonctions $\sum u_{n|_J}$ converge simplement (resp. uniformément).

- La convergence uniforme d'une série de fonctions implique sa convergence simple, la réciproque n'étant pas vraie en général.
- Par abus de notation, on note parfois une série de fonctions $\sum u_n(x)$ et non pas $\sum u_n$.
Par exemple, parler de la série de fonctions $\sum_{n \geq 0} e^{-nx}$ sur \mathbb{R} revient rigoureusement à parler de la série de fonctions $\sum_{n \geq 0} (x \in \mathbb{R} \mapsto e^{-nx})$.

EXEMPLES 6

Étudier la convergence simple des séries de fonctions suivantes :

$$(1) \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{n+x} \text{ sur } \mathbb{R}_+$$

$$(2) \sum_{n \geq 1} \frac{nx}{n^3+x^2} \text{ sur } \mathbb{R}_+$$

PROPOSITION 5 – *Caractérisation de la convergence uniforme pour les séries de fonctions*

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions de $\mathcal{F}(I, \mathbb{K})$.

La série de fonctions $\sum u_n$ converge uniformément si et seulement si les conditions suivantes sont vérifiées :

- (1) La série de fonctions $\sum u_n$ converge simplement ;
- (2) La suite de fonctions $(R_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de ses restes converge uniformément vers 0.

EXEMPLES 7

Étudier la convergence uniforme des séries de fonctions étudiées précédemment :

$$(1) \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{n+x} \text{ sur } \mathbb{R}_+$$

$$(2) \sum_{n \geq 1} \frac{nx}{n^3+x^2} \text{ sur } \mathbb{R}_+$$

Pour le deuxième cas, on montrera qu'il n'y a pas convergence uniforme en minorant convenablement le reste.

III. 2. CONVERGENCE NORMALE

On rappelle que le \mathbb{K} -espace vectoriel $\mathcal{B}(I, \mathbb{K})$ des fonctions bornées de I dans \mathbb{K} est muni de la norme de la convergence uniforme notée $\|\cdot\|_\infty$.

DÉFINITION 4 – *Convergence normale*

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions de $\mathcal{B}(I, \mathbb{K})$.

On dit que la série de fonctions $\sum u_n$ converge normalement si la série numérique $\sum \|u_n\|_\infty$ converge.

REMARQUE On dit que la série de fonctions $\sum u_n$ converge normalement sur $J \subset I$ si la série de fonctions $\sum u_n|_J$ converge normalement.

EXEMPLES 8

Étudier la convergence normale des séries de fonctions suivantes. Lorsqu'il n'y a pas convergence normale, on essaiera à restreindre l'intervalle d'étude pour en obtenir.

$$(1) \sum_{n \geq 1} \frac{\sin(nx)}{n^2} \text{ sur } \mathbb{R}$$

$$(2) \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{n+x} \text{ sur } \mathbb{R}_+$$

$$(3) \sum_{n \geq 1} \frac{nx}{n^3+x^2} \text{ sur } \mathbb{R}_+$$

THÉORÈME 6 – *Convergence normale implique convergence uniforme*

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions de $\mathcal{B}(I, \mathbb{K})$.

Si la série de fonctions $\sum u_n$ converge normalement sur I alors elle converge uniformément sur I .

REMARQUE La réciproque est fautive, comme cela a été vu dans les exemples qui précèdent.

PROPOSITION 6 – *Condition suffisante de convergence normale*

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions de $\mathcal{F}(I, \mathbb{K})$.


Supposons qu'il existe une suite réelle positive $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que la série $\sum \alpha_n$ converge et vérifiant, à partir d'un certain rang, la majoration :

$$\forall x \in I, \quad |u_n(x)| \leq \alpha_n$$

Alors la série de fonctions $\sum u_n$ converge normalement sur I .

REMARQUE – *Très important!*

La suite $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ne doit pas dépendre de x .

 **MÉTHODE** – *Techniques d'étude d'une série de fonctions*

■ **Convergence simple.**

On fixe donc $x \in I$ et on étudie la convergence de la série numérique $\sum u_n(x)$. Il faut parfois faire des disjonctions de cas selon les valeurs de x .

■ **Convergence uniforme.**

Pour montrer que la série de fonctions converge uniformément, il suffit de trouver une suite réelle positive $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$ qui tend vers 0 et vérifiant, à partir d'un certain rang, la majoration :

$$\forall x \in I, \quad |R_n(x)| \leq \alpha_n$$

Ceci assurera en effet que la suite $(R_n)_{n \in \mathbb{N}}$ des restes converge uniformément vers 0.

■ **Prouver qu'il n'y a pas convergence uniforme.**

Il suffit de trouver une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ à valeurs dans I telle que la suite $(|R_n(x_n)|)_{n \in \mathbb{N}}$ ne tende pas vers 0.

On peut aussi montrer que la suite de fonctions $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ne converge pas uniformément vers 0. En effet, si la série de fonctions $\sum u_n$ converge uniformément, la suite $(R_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers 0 de sorte que, par différence, la suite de terme général $u_n = R_{n-1} - R_n$ converge uniformément vers 0 également.

En l'absence de convergence uniforme sur tout I , on peut parfois établir la convergence uniforme sur des parties $J \subset I$ de I .

■ **Convergence normale.**

En effet, cette dernière implique directement les convergences simple et uniforme. Pour ce faire, on peut exprimer $\|u_n\|_\infty$, à l'aide d'une étude de fonctions si besoin, et étudier la série $\sum \|u_n\|_\infty$.

Sinon, on peut chercher à utiliser la **PROPOSITION 6** en cherchant une suite réelle positive $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que $\sum \alpha_n$ converge et vérifiant, à partir d'un certain rang, la majoration :

$$\forall x \in I, \quad |u_n(x)| \leq \alpha_n$$

En l'absence de convergence normale sur tout I , on peut parfois établir la convergence normale sur des parties $J \subset I$ de I .

IV. RÉGULARITÉ DE LA SOMME D'UNE SÉRIE DE FONCTIONS

IV. 1. LIMITE ET CONTINUITÉ

THÉORÈME 7 – Continuité d'une somme

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions de $\mathcal{F}(I, \mathbb{K})$. On suppose que :

- Les fonctions $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont continues sur I ;
- La série de fonctions $\sum u_n$ converge uniformément sur I (ou sur tout segment de I).

Alors la fonction somme $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ est continue sur I .

THÉORÈME 8 – Théorème de la double limite

Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions de $\mathcal{F}(I, \mathbb{K})$ et a une extrémité de I . On suppose que :

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction u_n admet une limite finie ℓ_n en a ;
- La série de fonctions $\sum u_n$ converge uniformément sur I (ou sur un voisinage de a).

Alors la série numérique $\sum \ell_n$ est convergente et :

$$\lim_{x \rightarrow a} \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \ell_n$$

IV. 2. INTÉGRATION TERME À TERME

THÉORÈME 9 – Intégration d'une somme

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions de $\mathcal{F}([a, b], \mathbb{K})$. On suppose que :

- Les fonctions $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont continues sur $[a, b]$;
- La série de fonctions $\sum u_n$ converge uniformément sur $[a, b]$.

Alors :

$$\int_a^b \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x) dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_a^b u_n(x) dx$$

IV. 3. DÉRIVATION TERME À TERME

THÉORÈME 10 – Dérivation d'une somme

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions de $\mathcal{F}(I, \mathbb{K})$. On suppose que :

- Les fonctions $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont de classe \mathcal{C}^1 sur I ;
- La série de fonctions $\sum u_n$ converge simplement sur I ;
- La série de fonctions $\sum u'_n$ converge uniformément sur I (ou sur tout segment de I).

Alors la fonction somme $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ est de classe \mathcal{C}^1 sur I et :

$$\left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n \right)' = \sum_{n=0}^{+\infty} u'_n$$

IV. 4. DÉRIVATION TERME À TERME D'ORDRE SUPÉRIEUR

THÉORÈME 11 – Dérivation d'ordre supérieur d'une somme

Pour $k \geq 1$, soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions de $\mathcal{F}(I, \mathbb{K})$. On suppose que :

- Les fonctions $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont de classe \mathcal{C}^k sur I ;
- Pour tout $j \in \llbracket 0, k-1 \rrbracket$, la série de fonctions $\sum u_n^{(j)}$ converge simplement sur I ;
- La série de fonctions $\sum u_n^{(k)}$ converge uniformément sur I (ou sur tout segment de I).

Alors la fonction somme $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ est de classe \mathcal{C}^k sur I avec :

$$\forall j \in \llbracket 0, k \rrbracket, \left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n \right)^{(j)} = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n^{(j)}$$

IV. 5. UN EXEMPLE : LA FONCTION ζ DE RIEMANN

EXERCICE 9

On étudie dans cet exercice la série de fonctions $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^x}$ sur $]1, +\infty[$.

1. Étudier les convergences simple, uniforme et normale de cette série de fonctions.

Lorsque cela a un sens, on posera :

$$\zeta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$$

2. Prouver que ζ est continue sur $]1, +\infty[$.
3. Prouver que ζ est de classe \mathcal{C}^∞ sur $]1, +\infty[$.
4. Étudier la limite de ζ en $+\infty$.
5. Donner un équivalent de ζ en 1^+ et en déduire en particulier sa limite en 1^+ .
On pourra faire une comparaison série – intégrale.