DEVOIR À LA MAISON N°3

CORRIGÉ

PROBLÈME

PARTIE I – RÉDUCTION DE MATRICES DE $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

1. QUELQUES GÉNÉRALITÉS.

1.1. Soient $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ que l'on écrit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. On a :

$$\chi_A(\lambda) = \det(\lambda I_2 - A) = \begin{vmatrix} \lambda - a & -b \\ -c & \lambda - d \end{vmatrix} = (\lambda - a)(\lambda - d) - (-c)(-b) = \lambda^2 - (a+d)\lambda + (ad - bc) = \lambda^2 - \mathrm{Tr}(A)\lambda + \det A.$$

1.2. Avec la question précédente, le discriminant du polynôme caractéristique est $\Delta = \mathrm{Tr}(A)^2 - 4\det A$. Dans la suite, on appelle (P) la proposition :

$$\mathrm{Tr}(A)^2 - 4\det(A) \neq 0 \quad \text{ou} \quad \exists \lambda_0 \in \mathbb{C} \text{ tel que } A = \lambda_0 I_2$$

- On suppose A diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$. Si jamais $\Delta \neq 0$ alors (P) est vérifiée. Si $\Delta = 0$, A admet une seule valeur propre $\lambda_0 \in \mathbb{C}$ et, puisqu'elle est diagonalisable, elle est semblable à $\lambda_0 I_2$. Il existe ainsi $P \in GL_2(\mathbb{C})$ telle que $A = P(\lambda_0 I_2)P^{-1} = \lambda_0 I_2$. Ainsi (P) est encore vérifiée.
- Réciproquement, on suppose (P) vérifiée. Si $\Delta \neq 0$, le polynôme caractéristique de A admet deux racines simples dans $\mathbb{C}$, donc A admet deux valeurs propres distinctes dans $\mathbb{C}$ et est donc diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$. S'il existe $\lambda_0 \in \mathbb{C}$ tel que $A = \lambda_0 I_2$, alors A est diagonale et donc diagonalisable.

Par double implication, on a prouvé que A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ si et seulement si (P) est vérifiée.

1.3. On raisonne de façon similaire à la question précédente. Dans la suite, on appelle (P) la proposition :

$$\mathrm{Tr}(A)^2 - 4\det(A) > 0 \quad \text{ou} \quad \exists \lambda_0 \in \mathbb{C} \text{ tel que } A = \lambda_0 I_2$$

- On suppose A diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Si jamais $\Delta > 0$ alors (P) est vérifiée. Si $\Delta = 0$, A admet une seule valeur propre $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ et, puisqu'elle est diagonalisable, elle est semblable à $\lambda_0 I_2$. Il existe ainsi $P \in GL_2(\mathbb{C})$ telle que $A = P(\lambda_0 I_2)P^{-1} = \lambda_0 I_2$. Ainsi (P) est encore vérifiée. Enfin, si $\Delta < 0$, le polynôme caractéristique de A n'a pas de racines réelles et A n'admet pas de valeurs propres réelles. Ceci est absurde puisque A est supposée diagonalisable. Ainsi le cas $\Delta < 0$ n'arrive jamais.
- Réciproquement, on suppose (P) vérifiée. Si $\Delta > 0$, le polynôme caractéristique de A admet deux racines simples dans $\mathbb{R}$, donc A admet deux valeurs propres distinctes dans $\mathbb{R}$ et est donc diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. S'il existe $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ tel que $A = \lambda_0 I_2$, alors A est diagonale et donc diagonalisable.

Par double implication, on a prouvé que A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ si et seulement si (P) est vérifiée.

2. 2.1. En écrivant le système de l'énoncé sous forme matricielle, on voit que, pour $k \in \mathbb{N}$, on a $X_{k+1} = AX_k$ où la matrice A est donnée par :

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

2.2. On prouve par récurrence que $X_k = A^k X_0$ pour $k \in \mathbb{N}$.

- **Initialisation :** Si $k = 0$, on a bien $A^0 X_0 = I_2 X_0 = X_0$.
- **Hérédité :** Supposons que $X_k = A^k X_0$ pour un $k \in \mathbb{N}$. On a alors grâce à la question précédente puis par hypothèse de récurrence que :

$$X_{k+1} = AX_k = A \times A^k X_0 = A^{k+1} X_0$$

D'où le résultat par principe de récurrence.

2.3. Avec la question **1**, on a $\chi_A(\lambda) = \lambda^2 - \mathrm{Tr}(A)\lambda + \det A = \lambda^2 - 5\lambda + 6 = (\lambda-2)(\lambda-3)$ pour $\lambda \in \mathbb{R}$. Ainsi A a deux valeurs propres distinctes et elle est diagonalisable.

Après résolution des systèmes $AX = 2X$ et $AX = 3X$ pour $X \in \mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{R})$, on obtient :

$$E_2(A) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right) \qquad \text{et} \qquad E_3(A) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}\right)$$

Avec l'expression de ces sous-espaces propres, on peut constituer une base de vecteurs propres de $\mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ en concaténant les bases de $E_2(A)$ et $E_3(A)$ déterminées ci-dessus. On a donc :

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix}2 & 0\\0 & 3\end{pmatrix} = D \qquad \text{où} \qquad P = \begin{pmatrix}1 & 2\\1 & 1\end{pmatrix}$$

2.4. On peut prouver par récurrence que $A^k = PD^kP^{-1}$ pour $k \in \mathbb{N}$. On calcule l'inverse de P avec la formule de l'inverse d'une matrice de taille 2 :

$$P^{-1} = \begin{pmatrix}-1 & 2\\1 & -1\end{pmatrix}$$

Les puissances d'une matrice diagonale s'obtenant en mettant à la puissance les éléments diagonaux, on obtient alors, si $k \in \mathbb{N}$:

$$A^k = PD^kP^{-1} = \begin{pmatrix}1 & 2\\1 & 1\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}2^k & 0\\0 & 3^k\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}-1 & 2\\1 & -1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\times 3^k - 2^k & -2\times 3^k + 2^{k+1}\\ 3^k - 2^k & -3^k + 2^{k+1}\end{pmatrix}$$

2.5. Soit $k \in \mathbb{N}$. Puisque $X_k = A^kX_0$ d'après **2.2**, on a :

$$\begin{pmatrix}u_k\\v_k\end{pmatrix} = A^k\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$$

Avec l'expression de A^k de la question précédente, il vient :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad u_k = 3\times 2^k - 2\times 3^k \quad \text{et} \quad v_k = 3\times 2^k - 3^k$$

Partie II – Quelques cas plus généraux

3. 3.1. Après calculs, on a :

$$J^2 = \begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad J^3 = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{pmatrix} = I_3$$

Soit $k \in \mathbb{N}$. On fait une disjonction de cas modulo 3 pour k.

- Si $k = 3p$ alors $J^k = J^{3p} = (J^3)^p = I_3^p = I_3$.
- Si $k = 3p+1$ alors $J^k = J^{3p+1} = (J^3)^p \times J = I_3^p \times J = J$.
- Si $k = 3p+2$ alors $J^k = J^{3p+2} = (J^3)^p \times J^2 = I_3^p \times J^2 = J^2$.

3.2. On remarque que $j^3 = e^{2i\pi} = 1$ de sorte que par sommation des premiers termes d'une suite géométrique de raison $j \neq 1$, on a :

$$1 + j + j^2 = \frac{1-j^3}{1-j} = 0$$

3.3. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. On a, par développement selon la première ligne :

$$\chi_J(\lambda) = \det(\lambda I_3 - J) = \begin{vmatrix}\lambda & -1 & 0\\0 & \lambda & -1\\-1 & 0 & \lambda\end{vmatrix} = \lambda\times\lambda^2 + (-1)\times 1 = \lambda^3 - 1$$

Le spectre de J est donc constitué des racines troisième de l'unité. Ainsi $\mathrm{sp}(J) = \{1, j, j^2\}$.

3.4. Puisque J admet trois valeurs propres distinctes dans $\mathbb{C}$, elle est diagonalisable dans $\mathscr{M}_3(\mathbb{C})$. Une résolution du système JX = X pour $X \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{C})$ donne :

$$E_1(J) = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right)$$

De plus, on a :

$$JX = jX \iff \begin{cases} -jx+y = 0 \\ -jy+z = 0 \\ x-jz = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} y = jx \\ z = j^2x \end{cases} \quad \text{donc} \quad E_j(J) = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\j\\j^2\end{pmatrix}\right)$$

De la même façon, on a :

$$E_{j^2}(J) = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\j^2\\j\end{pmatrix}\right)$$

On remarque que $\overline{j} = e^{-\frac{2i\pi}{3}} = e^{-\frac{2i\pi}{3}+2i\pi} = e^{\frac{4i\pi}{3}} = j^2$ de sorte que l'on a finalement :

$$J = PDP^{-1} \quad \text{où} \quad P = \begin{pmatrix}1&1&1\\1&j&j^2\\1&j^2&j\end{pmatrix} \quad \text{et} \quad D = \begin{pmatrix}1&0&0\\0&j&0\\0&0&j^2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&0&0\\0&j&0\\0&0&\overline{j}\end{pmatrix}$$

3.5. On a directement, grâce au calcul de J et J^2 effectué plus haut, que $A(a,b,c) = aI_3 + bJ + cJ^2$.

3.6. La question précédente donne $J = PDP^{-1}$. On en déduit immédiatement $J^2 = PD^2P^{-1}$. De plus, on a clairement $I_3 = PI_3P^{-1}$. Ainsi :

$$A(a,b,c) = aI_3 + bJ + cJ^2 = aPI_3P^{-1} + bPDP^{-1} + cPD^2P^{-1} = P(aI_3 + bD + cD^2)P^{-1}$$

On remarque que :

$$aI_3 + bD + cD^2 = \begin{pmatrix}a+b+c & 0 & 0\\ 0 & a+bj+cj^2 & 0\\ 0 & 0 & a+bj^2+cj\end{pmatrix}$$

est une matrice diagonale. Ainsi $A(a,b,c)$ est semblable à une matrice diagonale et est donc diagonalisable. De plus, la matrice de passage P ne dépend pas de a, b et c.

3.7. Les valeurs propres de $A(a,b,c)$ sont donc les éléments diagonaux de la matrice $aI_3+bD+cD^2$ à savoir $a+b+c$, $a+bj+cj^2$ et $a+bj^2+cj$.

3.8. Puisque $A(a,b,c)$ et $aI_3 + bD + cD^2$ sont semblables, elles ont même déterminant. Comme cette dernière matrice est diagonale, il vient :

$$\det(A(a,b,c)) = \det(aI_3 + bD + cD^2) = (a+b+c)(a+bj+cj^2)(a+bj^2+cj)$$

3.9. L'ensemble E est l'ensemble des combinaisons linéaires de I_3, J et J^2, il s'écrit donc $E = \text{Vect}(I_3, J, J^2)$. Ainsi c'est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_3(\mathbb{C})$.

3.10. La famille (I_3, J, J^2) est, par ce qui précède, une famille génératrice de E. D'autre part, on peut facilement vérifier qu'elle est libre en montrant que :

$$\forall (a,b,c) \in \mathbb{C}^3, \quad aI_3 + bJ + cJ^2 = 0 \implies a = b = c = 0$$

Par suite c'est une base de E et $\dim(E) = 3$.

4. **4.1.** Par définition de u, on a immédiatement :

$$U = \begin{pmatrix}0&1&0&\dots&0\\ \vdots&0&1&\ddots&0\\ \vdots&&\ddots&\ddots&0\\ 0&&&\ddots&1\\ 1&0&\dots&\dots&0\end{pmatrix}$$

4.2. Par linéarité de u, avec un changement de variable $\ell = k-1$ et en utilisant $w^n = 1$, il vient :

$$u(x_\omega) = u\left(\sum_{k=1}^{n} \omega^{k-1} e_k\right) = u(e_1) + \sum_{k=2}^{n} \omega^{k-1} u(e_k) = e_n + \sum_{k=2}^{n} \omega^{k-1} e_{k-1} = \omega^n e_n + \sum_{\ell=1}^{n-1} \omega^\ell e_\ell = \sum_{\ell=1}^{n} \omega^\ell e_\ell$$

On a ainsi prouvé :

$$u(x_\omega) = \sum_{\ell=1}^{n} \omega^\ell e_\ell = \omega \sum_{\ell=1}^{n} \omega^{\ell-1} e_\ell = \omega x_\omega$$

4.3. Par la question précédente, toute racine n−ième de l'unité ω est valeur propre de u puisque $x_\omega \neq 0$ en est un vecteur propre associé. Ainsi u possède n valeurs propres distinctes et $\dim(\mathbb{C}^n) = n$ de sorte que u est diagonalisable. De plus, en notant $\omega_1, \ldots, \omega_n$ les n racines n−ème de l'unité, une base de vecteurs propres de u est formée des vecteurs $(x_{\omega_1}, x_{\omega_2}, \ldots, x_{\omega_n})$.

4.4. Pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, on a $u(x_{\omega_k}) = \omega_k x_{\omega_k}$ donc, par une récurrence immédiate, $u^n(x_{\omega_k}) = \omega_k^n x_{\omega_k} = x_{\omega_k}$. Les $(x_{\omega_k})_{k \in [\![1,n]\!]}$ formant une base de $\mathbb{C}^n$, on en déduit que $u^n = \mathrm{Id}_{\mathbb{C}^n}$

5. **5.1.** Après calculs, on a :

$$\mathrm{U} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathrm{U}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathrm{U}^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathrm{U}^4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathrm{I}_4$$

5.2. Les racines quatrièmes de l'unité sont 1, i, -1 et $-i$. D'après **4.3**, U est diagonalisable et $\mathrm{U} = \mathrm{PDP}^{-1}$ avec :

$$\mathrm{D} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathrm{P} = \begin{pmatrix} 1^0 & i^0 & (-1)^0 & (-i)^0 \\ 1^1 & i^1 & (-1)^1 & (-i)^1 \\ 1^2 & i^2 & (-1)^2 & (-i)^2 \\ 1^3 & i^3 & (-1)^3 & (-i)^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & i & -1 & -i \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -i & -1 & i \end{pmatrix}$$

puisque P est la matrice de passage de la base canonique à la base $(x_{\omega_1}, x_{\omega_2}, x_{\omega_3}, x_{\omega_4})$.
Puisque $\mathrm{V} = a\mathrm{I}_4 + b\mathrm{U} + c\mathrm{U}^2 + d\mathrm{U}^3$, on aura, de façon similaire à **3.6**, $\mathrm{V} = \mathrm{P}(a\mathrm{I}_4 + b\mathrm{D} + c\mathrm{D}^2 + d\mathrm{D}^3)\mathrm{P}^{-1}$. Comme la matrice $a\mathrm{I}_4 + b\mathrm{D} + c\mathrm{D}^2 + d\mathrm{D}^3$ est diagonale, la matrice V est diagonalisable et ses valeurs propres sont les termes diagonaux de la matrice $a\mathrm{I}_4 + b\mathrm{D} + c\mathrm{D}^2 + d\mathrm{D}^3$, c'est-à-dire :

$$\mathrm{sp(V)} = \{a+b+c+d,\ a+ib-c-id,\ a-b+c-d,\ a-ib-c+id\}$$

Une base de vecteurs propres associés est donnée par $(x_{\omega_1}, x_{\omega_2}, x_{\omega_3}, x_{\omega_4})$.

Partie III – Une preuve du théorème de Cayley – Hamilton

6. Le polynôme caractéristique de A étant scindé dans $\mathbb{C}[X]$, le cours assure que A est trigonalisable dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$, c'est-à-dire qu'il existe $\mathrm{P} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ et $\mathrm{T} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ triangulaire supérieure telles que $\mathrm{A} = \mathrm{PTP}^{-1}$.

7. Les matrices T et A étant semblables, elles ont le même polynôme caractéristique. En effet, si $\lambda \in \mathbb{R}$, on a :

$$\chi_\mathrm{A}(\lambda) = \det(\lambda \mathrm{I}_n - \mathrm{A}) = \det(\lambda\mathrm{I}_n - \mathrm{PTP}^{-1}) = \det(\mathrm{P}(\lambda\mathrm{I}_n - \mathrm{T})\mathrm{P}^{-1}) = \det(\mathrm{P})\det(\lambda\mathrm{I}_n - \mathrm{T})\det(\mathrm{P}^{-1}) = \det(\mathrm{T} - \lambda\mathrm{I}_n) = \chi_\mathrm{T}(\lambda)$$

où l'on a utilisé que $\det(\mathrm{P})\det(\mathrm{P}^{-1}) = \det(\mathrm{PP}^{-1}) = \det(\mathrm{I}_n) = 1$.

8. En développant les deux côtés de l'égalité souhaitée, on obtient immédiatement le résultat.

9. Soit $k \in [\![1, n-1]\!]$. Par un calcul simple, TE_{k+1} est la $(k+1)$−ème colonne de la matrice T. On a donc, en désignant par $*$ des coefficients inconnus, un résultat de la forme :

$$\mathrm{TE}_{k+1} = \begin{pmatrix} * \\ \vdots \\ * \\ \lambda_{k+1} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

où λ_{k+1} est situé à la $(k+1)-$ème ligne. On en déduit :

$$\mathrm{T}\mathrm{E}_{k+1} - \lambda_{k+1}\mathrm{E}_{k+1} = \begin{pmatrix} * \\ \vdots \\ * \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

de sorte que les coordonnées de ce vecteur sur $\mathrm{E}_{k+1},\dots,\mathrm{E}_n$ sont nulles. On en déduit qu'il appartient bien à $\mathrm{Vect}(\mathrm{E}_1,\mathrm{E}_2,\dots,\mathrm{E}_k)$.

10. Pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, on note $\mathrm{D}_k = \mathrm{Vect}(\mathrm{E}_1,\dots,\mathrm{E}_k)$ et $\mathrm{D}_0 = \{0_{\mathbb{C}^n}\}$. Avec la question précédente, on obtient que :

$$(\mathrm{T}-\lambda_k\mathrm{I}_n)(\mathrm{E}_k) \in \mathrm{D}_{k-1} \text{ pour tout } k \geqslant 2 \qquad (*)$$

Par la caractérisation matricielle de la stabilité, étant donné que T est triangulaire supérieure, les sous-espaces vectoriels $(\mathrm{D}_k)_{k\in[\![0,n]\!]}$ sont stables par T et donc aussi par $(\mathrm{T}-\lambda_k\mathrm{I}_n)$. On a donc l'inclusion $(\mathrm{T}-\lambda_k\mathrm{I}_n)(\mathrm{D}_{k-1}) \subset \mathrm{D}_{k-1}$ pour $k \geqslant 1$. Ainsi, on conclut avec $(*)$ que $(\mathrm{T}-\lambda_k\mathrm{I}_n)(\mathrm{D}_k) \subset \mathrm{D}_{k-1}$ pour $k \geqslant 2$ puisque D_{k-1} est un sous-espace vectoriel. De plus, $(\mathrm{T}-\lambda_1\mathrm{I}_n)\mathrm{E}_1 = \lambda_1\mathrm{E}_1 - \lambda_1\mathrm{E}_1 = 0$ de sorte que $(\mathrm{T}-\lambda_1\mathrm{I}_n)(\mathrm{D}_1) = \mathrm{D}_0$. On a donc :

$$\forall k \in [\![1,n]\!], \quad (\mathrm{T}-\lambda_k\mathrm{I}_n)(\mathrm{D}_k) \subset \mathrm{D}_{k-1} \qquad (**)$$

On va alors prouver par récurrence que $\mathrm{M}_k(\mathrm{D}_k) \subset \{0\}$ pour $k \in [\![1,n]\!]$.

- **Initialisation :** Si $n = 1$, on a $\mathrm{M}_1\mathrm{E}_1 = (\mathrm{T}-\lambda_1\mathrm{I}_n)(\mathrm{D}_1) \subset \mathrm{D}_0 = \{0\}$ par $(**)$ avec $k = 1$.
- **Hérédité :** Supposons le résultat vrai à un rang $k \in [\![1,n-1]\!]$ et prouvons-le au rang $k+1$. On a pour commencer $\mathrm{M}_{k+1}(\mathrm{D}_{k+1}) = \mathrm{M}_k(\mathrm{T}-\lambda_{k+1}\mathrm{I}_n)(\mathrm{D}_{k+1})$. Mais, avec $(**)$, on sait que $(\mathrm{T}-\lambda_{k+1}\mathrm{I}_n)(\mathrm{D}_{k+1}) \subset \mathrm{D}_k$. Ainsi, avec l'hypothèse de récurrence, on obtient que $\mathrm{M}_{k+1}(\mathrm{D}_{k+1}) = \mathrm{M}_k(\mathrm{T}-\lambda_{k+1}\mathrm{I}_n)(\mathrm{D}_{k+1}) \subset \mathrm{M}_k(\mathrm{D}_k) \subset \{0\}$.

D'où le résultat par principe de récurrence. Enfin, pour conclure, si $k \in [\![1,n]\!]$, on a $\mathrm{E}_k \in \mathrm{D}_k$ donc $\mathrm{M}_k\mathrm{E}_k \in \{0\}$ par ce qui précède, c'est-à-dire $\mathrm{M}_k\mathrm{E}_k = 0$.

11. Le résultat précédent donne en particulier $\mathrm{M}_n\mathrm{E}_n = 0$. De plus, si $k \in [\![1,n-1]\!]$, on a avec le résultat de commutativité de la question **8** que :

$$\mathrm{M}_n\mathrm{E}_k = (\mathrm{T}-\lambda_{k+1}\mathrm{I}_n)\cdots(\mathrm{T}-\lambda_n\mathrm{I}_n)\mathrm{M}_k\mathrm{E}_k = 0$$

Ainsi $\mathrm{M}_n\mathrm{E}_k = 0$ pour tout $k \in [\![1,n]\!]$. Comme $(\mathrm{E}_k)_{k\in[\![1,n]\!]}$ est une base de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{C})$, on en déduit que $\mathrm{M}_n = 0$.

Avec la relation $\mathrm{T} = \mathrm{P}^{-1}\mathrm{A}\mathrm{P}$, on a :

$$\mathrm{M}_n = \prod_{j=1}^{n}(\mathrm{T}-\lambda_j\mathrm{I}_n) = \prod_{j=1}^{n}\left(\mathrm{P}^{-1}(\mathrm{A}-\lambda_j\mathrm{I}_n)\mathrm{P}\right) = \mathrm{P}^{-1}\left(\prod_{j=1}^{n}(\mathrm{A}-\lambda_j\mathrm{I}_n)\right)\mathrm{P}$$

Avec $\mathrm{M}_n = 0$, et après multiplication à gauche par P et à droite par P^{-1}, on en déduit :

$$\prod_{j=1}^{n}(\mathrm{A}-\lambda_j\mathrm{I}_n) = 0$$

Mais, T étant triangulaire supérieure, son polynôme caractéristique est donné par $\chi_\mathrm{T}(\lambda) = (\lambda-\lambda_1)\cdots(\lambda-\lambda_n)$ pour $\lambda \in \mathbb{R}$. Avec la question **7**, on conclut finalement que :

$$\chi_\mathrm{A}(\mathrm{A}) = \chi_\mathrm{T}(\mathrm{A}) = \prod_{j=1}^{n}(\mathrm{A}-\lambda_j\mathrm{I}_n) = 0$$