

POUR LE LUNDI 23 NOVEMBRE



EXERCICE

Dans la suite, on travaille avec $\mathbb{R}[X]$ le \mathbb{R} -espace vectoriel des polynômes à coefficients réels et, pour $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{R}_n[X]$ le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$ constitué des polynômes à coefficients réels de degré au plus n . On se permettra d'identifier polynômes et fonctions polynomiales.

On introduit les deux applications N et L définies sur $\mathbb{R}_n[X]$ et à valeurs dans \mathbb{R} suivantes :

$$\forall P = \sum_{k=0}^n a_k X^k \in \mathbb{R}_n[X], \quad N(P) = \max_{0 \leq k \leq n} |a_k| \quad \text{et} \quad L(P) = \sup_{t \in [-1,1]} |P(t)|$$

1. Prouver que N et L sont des normes sur $\mathbb{R}_n[X]$.

Le but de l'exercice est de déterminer deux constantes réelles $C_1 > 0$ et $C_2 > 0$ vérifiant :

$$\forall P \in \mathbb{R}_n[X], \quad L(P) \leq C_1 N(P) \quad \text{et} \quad N(P) \leq C_2 L(P)$$

2. Prouver que $C_1 = n + 1$ vérifie $L(P) \leq C_1 N(P)$ pour tout polynôme $P \in \mathbb{R}_n[X]$.
Trouver un polynôme $P \in \mathbb{R}_n[X]$ pour lequel il y a égalité.

On cherche maintenant à obtenir une constante C_2 qui satisfait ce que l'on cherche. Pour ce faire, on introduit une suite $(T_k)_{k \in \mathbb{N}}$ de polynômes de $\mathbb{R}[X]$ en posant :

$$T_0 = 1, \quad T_1 = X \quad \text{et} \quad \forall k \in \mathbb{N}^*, \quad T_{k+1} = 2XT_k - T_{k-1}$$

On pose par ailleurs :

$$\forall (P, Q) \in \mathbb{R}[X]^2, \quad \varphi(P, Q) = \int_0^\pi P(\cos \theta) Q(\cos \theta) d\theta$$

3. Déterminer T_2, T_3 et T_4 .
4. Si $k \in \mathbb{N}$, donner le degré et le coefficient dominant de T_k .
5. Pour $k \in \mathbb{N}$, vérifier que T_k est le seul polynôme qui vérifie :

$$\forall \theta \in \mathbb{R}, \quad T_k(\cos \theta) = \cos(k\theta)$$

6. Justifier que (T_0, \dots, T_n) est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.
7. Si k et ℓ sont deux entiers naturels distincts, calculer $\varphi(T_k, T_k)$ et $\varphi(T_k, T_\ell)$.
8. Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$. Avec la question 6, on sait qu'il existe un (unique) n -uplet $(\alpha_0, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ tel que :

$$P = \sum_{k=0}^n \alpha_k T_k$$

- 8.1. Exprimer $\varphi(P, T_k)$ en fonction de α_k pour tout $k \in [0, n]$.
- 8.2. Établir que :

$$\forall k \in [0, n], \quad |\alpha_k| \leq 2L(P)$$

9. Si $n \in \mathbb{N}^*$, prouver que :

$$N(T_{n+1}) \leq 2N(T_n) + N(T_{n-1})$$

10. On pose $q = 1 + \sqrt{2}$. Démontrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad N(T_n) \leq q^n$$

11. Conclure que :

$$\forall P \in \mathbb{R}_n[X], \quad N(P) \leq q^{n+1} \sqrt{2} L(P)$$

EXERCICE

On note $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ le \mathbb{R} -espace vectoriel des matrices carrées à 2 lignes et 2 colonnes et à coefficients réels. On introduit $\mathcal{D}_2(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices diagonalisables de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, $\mathcal{S}_2(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, et $\mathcal{A}_2(\mathbb{R})$ celui des matrices antisymétriques de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

On rappelle les dimensions des sous-espaces vectoriels $\mathcal{S}_2(\mathbb{R})$ et $\mathcal{A}_2(\mathbb{R})$:

$$\dim(\mathcal{S}_2(\mathbb{R})) = 3 \quad \text{et} \quad \dim(\mathcal{A}_2(\mathbb{R})) = 1$$

Enfin, on pourra utiliser sans justification le résultat admis suivant :

THÉORÈME 1 – Théorème spectral

Toute matrice $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

PARTIE I

1. Exhiber un sous-espace vectoriel de dimension 3 de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ constitué de matrices diagonalisables.
2. En déduire la dimension maximale d'un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ contenu dans $\mathcal{D}_2(\mathbb{R})$.
3. L'ensemble $\mathcal{D}_2(\mathbb{R})$ est-il un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$? Justifier.
On pourra utiliser des arguments de dimension.
4. Déterminer alors tous les sous-espaces vectoriels de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ contenant $\mathcal{D}_2(\mathbb{R})$.
5. Soient $\Omega = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, (a-d)^2 + 4bc > 0 \right\}$ et $F = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, (a-d)^2 + 4bc \geq 0 \right\}$.
 - 5.1. Montrer que Ω est un ouvert de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et F un fermé de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
 - 5.2. Prouver que l'on a $\Omega \subset \mathcal{D}_2(\mathbb{R}) \subset F$.
 - 5.3. L'ensemble $\mathcal{D}_2(\mathbb{R})$ est-il un fermé de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$? Un ouvert de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$? Justifier.



Soit u un endomorphisme d'un \mathbb{R} -espace vectoriel E de dimension finie. On suppose qu'il existe une norme $\|\cdot\|$ sur E telle que l'on ait :

$$\forall x \in E, \quad \|u(x)\| \leq \|x\|$$

Pour tout entier naturel k non nul, on considère l'endomorphisme :

$$r_k = \frac{1}{k} \sum_{\ell=0}^{k-1} u^\ell = \frac{1}{k} (I_E + u + u^2 + \dots + u^{k-1})$$

où I_E représente l'endomorphisme identité de E .

1. Soit $x \in \text{Ker}(u - I_E)$. Déterminer $\lim_{k \rightarrow +\infty} r_k(x)$.
2. Soit $x \in \text{Im}(u - I_E)$. Montrer que $\lim_{k \rightarrow +\infty} r_k(x) = 0_E$.
3. En déduire que $E = \text{Ker}(u - I_E) \oplus \text{Im}(u - I_E)$.
4. Soit $x \in E$, un vecteur quelconque. Montrer que la suite $(r_k(x))_{k \in \mathbb{N}^*}$ converge vers un vecteur de E , que l'on notera $p(x)$. Interpréter géométriquement l'application $p : E \rightarrow E$ ainsi définie.

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice carrée d'ordre n à coefficients réels. On suppose qu'il existe une norme, aussi notée $\|\cdot\|$, sur l'espace vectoriel $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ identifié à \mathbb{R}^n , telle que, pour tout $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, on ait $\|AX\| \leq \|X\|$. Pour tout k entier naturel non nul, on considère la matrice :

$$R_k = \frac{1}{k} \sum_{\ell=0}^{k-1} A^\ell = \frac{1}{k} (I_n + A + A^2 + \dots + A^{k-1})$$

où I_n est la matrice identité dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

5. Montrer que la suite de matrices $(R_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ converge dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vers une matrice P telle que $P^2 = P$.

On fixe dans ce qui suit un entier $n \geq 2$. On notera $U \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ la matrice-colonne dont tous les coefficients sont égaux à 1. Une matrice carrée $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est dite *stochastique* si elle vérifie les conditions suivantes :

$$\forall (i,j) \in [1,n]^2, \quad a_{i,j} \geq 0 \quad (C_1) \quad \text{et} \quad \forall i \in [1,n], \quad \sum_{j=1}^n a_{i,j} = 1 \quad (C_2)$$

Nous dirons aussi qu'une matrice ligne $L = (\lambda_1 \dots \lambda_n) \in \mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{R})$ est stochastique lorsque ses coefficients λ_i sont tous positifs ou nuls et de somme égale à 1.

6. Vérifier que la condition (C_2) équivaut à la condition $AU = U$.
7. En déduire que l'ensemble \mathcal{E} des matrices stochastiques carrées d'ordre n est stable pour le produit matriciel.
8. Montrer que cet ensemble \mathcal{E} est une partie fermée et convexe de l'espace vectoriel $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

On munit l'espace $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ de la norme $\|\cdot\|_\infty$ définie par $\|X\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|$ si $X = (x_i)_{1 \leq i \leq n}$.

9. Montrer que si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est stochastique, alors on a $\|AX\|_\infty \leq \|X\|_\infty$ pour tout $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

Dans les questions suivantes, on note $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice stochastique et on suppose qu'il existe un entier naturel non nul p tel que la matrice A^p ait tous ses coefficients strictement positifs. Pour tout k entier naturel non nul, on posera dans la suite :

$$R_k = \frac{1}{k} \sum_{\ell=0}^{k-1} A^\ell$$

10. Montrer que $\text{Ker}(A^p - I_n)$ est de dimension 1.
 Si $X = (x_i)_{1 \leq i \leq n} \in \text{Ker}(A^p - I_n)$ et $s \in \llbracket 1, n \rrbracket$ vérifie $x_s = \max_{1 \leq j \leq n} x_j$, on montrera que $x_j = x_s$ pour tout $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$.
11. En déduire que $\text{Ker}(A - I_n) = \text{Vect}(U)$.
12. Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, la matrice R_k est stochastique.
13. Montrer que la suite $(R_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ converge dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vers une matrice P , stochastique, de rang 1.
14. En déduire que l'on peut écrire $P = UL$, où $L = (\lambda_1 \cdots \lambda_n) \in \mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{R})$ est une matrice-ligne stochastique.
15. Montrer que $PA = P$. En déduire que L est la seule matrice ligne stochastique vérifiant $LA = L$.
16. Montrer que les coefficients de la matrice ligne L sont tous strictement positifs.
17. Montrer que le réel 1 est valeur propre simple de A .
On pourra utiliser le résultat de la question 3.