DEVOIR À LA MAISON N°4

CORRIGÉ

EXERCICE

1. On commence par traiter le cas de l'application N.

- **Positivité :** On a clairement $N(P) \geqslant 0$ pour $P \in \mathbb{R}_n[X]$.
- **Homogénéité :** Si $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors on a :

$$N(\lambda P) = \max_{0 \leqslant k \leqslant n} |\lambda a_k| = \max_{0 \leqslant k \leqslant n} |\lambda||a_k| = |\lambda| \max_{0 \leqslant k \leqslant n} |a_k| = |\lambda| N(P)$$

- **Inégalité triangulaire :** Si $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ et $Q = \sum_{k=0}^{n} b_k X^k$ alors, par inégalité triangulaire :

$$\forall k \in [\![0,n]\!], \quad |a_k + b_k| \leqslant |a_k| + |b_k| \leqslant \max_{0 \leqslant k \leqslant n} |a_k| + \max_{0 \leqslant k \leqslant n} |b_k| = N(P) + N(Q)$$

  On en déduit que :

$$N(P+Q) = \max_{0 \leqslant k \leqslant n} |a_k + b_k| \leqslant N(P) + N(Q)$$

- **Séparation :** On se donne $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ tel que $N(P) = 0$. Par définition, cela donne $|a_k| = 0$ pour tout $k \in [\![0,n]\!]$, c'est-à-dire $a_k = 0$ pour tout $k \in [\![0,n]\!]$ soit $P = 0$.

On a bien démontré que N est une norme sur $\mathbb{R}_n[X]$.

On poursuit avec le cas de l'application L.

- **Positivité :** On a clairement $L(P) \geqslant 0$ pour $P \in \mathbb{R}_n[X]$.
- **Homogénéité :** Si $P \in \mathbb{R}_n[X]$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors on a :

$$L(\lambda P) = \sup_{t \in [-1,1]} |\lambda P(t)| = \sup_{t \in [-1,1]} |\lambda||P(t)| = |\lambda| \sup_{t \in [-1,1]} |P(t)| = |\lambda| L(P)$$

- **Inégalité triangulaire :** Si $P \in \mathbb{R}_n[X]$ et $Q \in \mathbb{R}_n[X]$ alors, par inégalité triangulaire :

$$\forall t \in [-1,1], \quad |P(t) + Q(t)| \leqslant |P(t)| + |Q(t)| \leqslant \sup_{t \in [-1,1]} |P(t)| + \sup_{t \in [-1,1]} |Q(t)| = L(P) + L(Q)$$

  On en déduit que :

$$L(P+Q) = \sup_{t \in [-1,1]} |P(t) + Q(t)| \leqslant L(P) + L(Q)$$

- **Séparation :** Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que $L(P) = 0$. Par définition, cela donne $|P(t)| = 0$ pour tout $t \in [-1,1]$, c'est-à-dire que $P = 0$ sur $[-1,1]$. Ainsi P a une infinité de racines et est de degré n et on obtient $P = 0$.

On a bien démontré que L est une norme sur $\mathbb{R}_n[X]$.

2. Soit $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \in \mathbb{R}_n[X]$. Si $t \in [-1,1]$, on a, par inégalité triangulaire :

$$|P(t)| = \left| \sum_{k=0}^{n} a_k t^k \right| \leqslant \sum_{k=0}^{n} |a_k| \underbrace{|t|^k}_{\leqslant 1} \leqslant \sum_{k=0}^{n} |a_k| \leqslant \sum_{k=0}^{n} \max_{0 \leqslant k \leqslant n} |a_k| = (n+1) N(P)$$

Ceci valant pour tout $t \in [-1,1]$, il vient :

$$L(P) = \sup_{t \in [-1,1]} |P(t)| \leqslant (n+1) N(P)$$

Le polynôme $P = X^n + X^{n-1} + \cdots + 1$ permet de réaliser l'égalité puisque l'on a facilement $N(P) = 1$ et $L(P) = (n+1)$.

3. Grâce à la relation de récurrence qui définit la suite $(\mathrm{T}_k)_{k\in\mathbb{N}}$, on trouve :

$$\mathrm{T}_2 = 2\mathrm{X}^2 - 1, \qquad \mathrm{T}_3 = 4\mathrm{X}^3 - 3\mathrm{X} \qquad \text{et} \qquad \mathrm{T}_4 = 8\mathrm{X}^4 - 8\mathrm{X}^2 + 1$$

4. Tout d'abord, T_0 est de degré 0 et de coefficient dominant 1. On prouve ensuite par récurrence double sur $k \in \mathbb{N}^*$ que T_k est de degré k et que son coefficient dominant est 2^{k-1}.

- **Initialisation :** Le polynôme $\mathrm{T}_1 = \mathrm{X}$ est bien de degré 1 et de coefficient dominant $1 = 2^{1-1}$ et le polynôme $\mathrm{T}_2 = 2\mathrm{X}^2 - 1$ est bien de degré 2 et de coefficient dominant $2 = 2^{2-1}$.
- **Hérédité :** Pour $k \geqslant 1$, on suppose que T_k et T_{k+1} sont de degrés respectifs k et $k+1$ et de coefficients dominants respectifs 2^{k-1} et 2^k. On a alors :

$$\mathrm{T}_{k+2} = 2\mathrm{X}\mathrm{T}_{k+1} - \mathrm{T}_k$$

  On obtient alors en étudiant cette égalité que T_{k+2} est de degré $k+2$ et de coefficient dominant égal à deux fois celui de T_{k+1}, c'est-à-dire à $2 \times 2^k = 2^{k+1} = 2^{k+2-1}$ comme souhaité.

D'où le résultat par principe de récurrence.

5. Soit $\theta \in \mathbb{R}$. On va prouver que $\mathrm{T}_k(\cos\theta) = \cos(k\theta)$ par récurrence double sur $k \geqslant 0$.

- **Initialisation :** Étant donné que $\mathrm{T}_0 = 1$ et $\mathrm{T}_1 = \mathrm{X}$, on a pour $k = 0$ et $k = 1$:

$$\mathrm{T}_0(\cos(\theta) = 1 = \cos(0\cdot\theta) \qquad \text{et} \qquad \mathrm{T}_1(\cos\theta) = \cos(\theta) = \cos(1\cdot\theta)$$

- **Hérédité :** Pour $k \geqslant 0$, on suppose le résultat vrai aux rangs k et $k+1$. On a alors, par la relation de récurrence définissant la suite $(\mathrm{T}_k)_{k\in\mathbb{N}}$ puis par utilisation des hypothèses de récurrence :

$$\mathrm{T}_{k+2}(\cos\theta) = 2\cos(\theta)\mathrm{T}_{k+1}(\cos\theta) - \mathrm{T}_k(\cos\theta) = 2\cos(\theta)\cos((k+1)\theta) - \cos(k\theta)$$

  En utilisant la formule de trigonométrie $\cos(a \pm b) = \cos a \cos b \mp \sin a \sin b$ pour $a, b \in \mathbb{R}$, on obtient :

$$\begin{aligned}
\mathrm{T}_{k+2}(\cos\theta) &= 2\cos(\theta)\cos((k+1)\theta) - \cos(k\theta)\\
&= 2\cos(\theta)\cos((k+1)\theta) - \cos((k+1)\theta - \theta)\\
&= 2\cos(\theta)\cos((k+1)\theta) - \cos((k+1)\theta)\cos(\theta) - \sin((k+1)\theta)\sin(\theta)\\
&= \cos(\theta)\cos((k+1)\theta) - \sin((k+1)\theta)\sin(\theta)\\
&= \cos((k+1)\theta + \theta) = \cos((k+2)\theta)
\end{aligned}$$

D'où le résultat par principe de récurrence.

Il reste à prouver l'unicité. On fixe $k \in \mathbb{N}$ et on se donne T un polynôme vérifiant $\mathrm{T}(\cos\theta) = \cos(k\theta)$ pour tout $\theta \in \mathbb{R}$. On a alors $\mathrm{T}(\cos\theta) = \mathrm{T}_k(\cos\theta)$ pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, de sorte que T et T_k coïncident sur $[-1,1]$ puisque $\cos(\mathbb{R}) = [-1,1]$. Ainsi le polynôme $\mathrm{T} - \mathrm{T}_k$ a une infinité de racines, il est donc nul et il vient ainsi $\mathrm{T} = \mathrm{T}_k$.

6. Avec la question **4**, les polynômes $\mathrm{T}_0, \ldots, \mathrm{T}_n$ sont non nuls et de degrés échelonnés. Ainsi, ils forment une famille libre. De plus, le cardinal de cette famille est égal à $n+1 = \dim(\mathbb{R}_n[\mathrm{X}])$ et elle forme donc une base de $\mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$.

7.
- Si $k = \ell = 0$, on a :

$$\varphi(\mathrm{T}_0, \mathrm{T}_0) = \int_0^\pi \mathrm{T}_0(\cos\theta)\mathrm{T}_0(\cos\theta)\,\mathrm{d}\theta = \int_0^\pi 1\cdot\mathrm{d}\theta = \pi$$

- Si $k > 0$, on a, grâce à la relation de la question **5** :

$$\begin{aligned}
\varphi(\mathrm{T}_k, \mathrm{T}_k) = \int_0^\pi \mathrm{T}_k(\cos\theta)\mathrm{T}_k(\cos\theta)\,\mathrm{d}\theta &= \int_0^\pi \cos^2(k\theta)\,\mathrm{d}\theta\\
&= \int_0^\pi \frac{\cos(2k\theta)+1}{2}\,\mathrm{d}\theta\\
&= \left[\frac{\sin(2k\theta)}{4k}\right]_0^\pi + \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}
\end{aligned}$$

- Si $k > 0$ ou $\ell > 0$, on a, grâce à la relation de la question **5** :

$$\begin{aligned}\varphi(\mathrm{T}_k, \mathrm{T}_\ell) = \int_0^\pi \mathrm{T}_k(\cos\theta)\mathrm{T}_\ell(\cos\theta)\,\mathrm{d}\theta = \int_0^\pi \cos(k\theta)\cos(\ell\theta)\,\mathrm{d}\theta &\\ = \int_0^\pi \frac{\cos((k+\ell)\theta)+\cos((k-\ell)\theta)}{2}\,\mathrm{d}\theta &\\ = \left[\frac{\sin((k+\ell)\theta)}{2(k+\ell)}\right]_0^\pi + \left[\frac{\sin((k-\ell)\theta)}{2(k-\ell)}\right]_0^\pi = 0 &\end{aligned}$$

8. **8.1.** On fixe $k \in [\![0, n]\!]$. On a alors, par linéarité de l'intégrale et avec la question précédente :

$$\begin{aligned}\varphi(\mathrm{P}, \mathrm{T}_k) &= \int_0^\pi \left(\sum_{\ell=0}^n \alpha_\ell \mathrm{T}_\ell(\cos\theta)\right)\mathrm{T}_k(\cos\theta)\,\mathrm{d}\theta = \sum_{\ell=0}^n \alpha_\ell \int_0^\pi \mathrm{T}_\ell(\cos\theta)\mathrm{T}_k(\cos\theta)\,\mathrm{d}\theta \\ &= \sum_{\ell=0}^n \alpha_\ell \underbrace{\varphi(\mathrm{T}_\ell, \mathrm{T}_k)}_{=0 \text{ si } \ell\neq k} = \alpha_k\varphi(\mathrm{T}_k,\mathrm{T}_k) = \begin{cases}\dfrac{\pi}{2}\alpha_k & \text{si } k > 0\\ \pi\alpha_k & \text{si } k = 0\end{cases}\end{aligned}$$

8.2. Pour $k \in [\![1, n]\!]$, on utilise la question précédente, l'inégalité triangulaire pour les intégrales et la relation de la question **5** pour obtenir :

$$|\alpha_k| = \frac{2}{\pi}|\varphi(\mathrm{P},\mathrm{T}_k)| = \frac{2}{\pi}\left|\int_0^\pi \mathrm{P}(\cos\theta)\mathrm{T}_k(\cos\theta)\,\mathrm{d}\theta\right| \leqslant \frac{2}{\pi}\int_0^\pi |\mathrm{P}(\underbrace{\cos\theta}_{\in[-1,1]})|\underbrace{|\cos(k\theta)|}_{\leqslant 1}\,\mathrm{d}\theta \leqslant \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \sup_{t\in[-1,1]}|\mathrm{P}(t)|\,\mathrm{d}\theta = 2\mathrm{L}(\mathrm{P})$$

Pour $k = 0$, on obtient de façon similaire $|\alpha_0| \leqslant \mathrm{L}(\mathrm{P})$ de sorte que l'on a encore $|\alpha_0| \leqslant 2\mathrm{L}(\mathrm{P})$.

9. On fixe $n \in \mathbb{N}^*$. Avec la relation de récurrence définissant la suite $(\mathrm{T}_k)_{k\in\mathbb{N}}$ et par inégalité triangulaire et homogénéité, on peut écrire :

$$\mathrm{N}(\mathrm{T}_{n+1}) = \mathrm{N}(2\mathrm{X}\mathrm{T}_n - \mathrm{T}_{n-1}) \leqslant \mathrm{N}(2\mathrm{X}\mathrm{T}_n) + \mathrm{N}(-\mathrm{T}_{n-1}) = 2\mathrm{N}(\mathrm{X}\mathrm{T}_n) + \mathrm{N}(\mathrm{T}_{n-1})$$

Enfin, comme les polynômes $\mathrm{X}\mathrm{T}_n$ et T_n ont les mêmes coefficients, on a clairement $\mathrm{N}(\mathrm{X}\mathrm{T}_n) = \mathrm{N}(\mathrm{T}_n)$, ce qui donne le résultat escompté.

10. On procède par récurrence double sur $n \in \mathbb{N}$.

- **Initialisation :** Si $n = 0$, on a $\mathrm{N}(\mathrm{T}_0) = \mathrm{N}(1) = 1 \leqslant 1 = q^0$. De plus, si $n = 1$, on a $\mathrm{N}(\mathrm{T}_1) = \mathrm{N}(\mathrm{X}) = 1 \leqslant 1 + \sqrt{2} = q^1$.
- **Hérédité :** On suppose le résultat vérifié aux rangs n et $n+1$ pour un $n \in \mathbb{N}$. Avec la question précédente et grâce aux hypothèses de récurrence, il vient :

$$\mathrm{N}(\mathrm{T}_{n+2}) \leqslant 2\mathrm{N}(\mathrm{T}_{n+1}) + \mathrm{N}(\mathrm{T}_n) \leqslant 2q^{n+1} + q^n = q^n(2q+1)$$

De plus, on a $q^2 = (1+\sqrt{2})^2 = 1 + 2\sqrt{2} + 2 = 1 + 2(1+\sqrt{2}) = 1 + 2q$ de sorte que l'on obtient :

$$\mathrm{N}(\mathrm{T}_{n+2}) \leqslant q^n(2q+1) = q^n \cdot q^2 = q^{n+2}$$

D'où le résultat par principe de récurrence.

11. On fixe $\mathrm{P} \in \mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$ que l'on décompose comme à la question **8** sous la forme $\mathrm{P} = \sum_{k=0}^n \alpha_k \mathrm{T}_k$. Par inégalité triangulaire et homogénéité on a déjà :

$$\mathrm{N}(\mathrm{P}) = \mathrm{N}\left(\sum_{k=0}^n \alpha_k\mathrm{T}_k\right) \leqslant \sum_{k=0}^n |\alpha_k|\mathrm{N}(\mathrm{T}_k)$$

On utilise alors les questions **8.2** et **10** pour finalement obtenir :

$$\mathrm{N}(\mathrm{P}) \leqslant \sum_{k=0}^n |\alpha_k|\mathrm{N}(\mathrm{T}_k) \leqslant \sum_{k=0}^n (2\mathrm{L}(\mathrm{P}))\,q^k = 2\mathrm{L}(\mathrm{P})\sum_{k=0}^n q^k = 2\mathrm{L}(\mathrm{P})\frac{\overbrace{q^{n+1}-1}^{\leqslant q^{n+1}}}{\underbrace{q-1}_{=\sqrt{2}}} \leqslant \sqrt{2}q^{n+1}\mathrm{L}(\mathrm{P})$$

EXERCICE

1. Avec le rappel, le sous-espace $\mathscr{S}_2(\mathbb{R})$ de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ est de dimension 3 et constitué de matrices diagonalisables d'après le théorème spectral.

2. On vient de voir que $\mathscr{D}_2(\mathbb{R})$ contient un sous-espace de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ de dimension 3. Par ailleurs, il n'en contient pas de dimension 4 puisque le seul sous-espace de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ de dimension 4 est $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$, et ce dernier n'est pas inclus dans $\mathscr{D}_2(\mathbb{R})$. En effet, on peut par exemple remarquer que la matrice élémentaire $E_{1,2}$ de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ n'est pas diagonalisable (étant triangulaire, l'ensemble de ses valeurs propres est l'ensemble de ses coefficients diagonaux, à savoir $\{0\}$ et si elle était diagonalisable, elle serait semblable à la matrice nulle et donc nulle, ce qui n'est pas le cas). Ainsi, la dimension maximale d'un sous-espace de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ inclus dans $\mathscr{D}_2(\mathbb{R})$ est 3.

3. Avec les questions **1** et **2**, si $\mathscr{D}_2(\mathbb{R})$ était un sous-espace de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$, ce serait un sous-espace strict de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ contenant $\mathscr{S}_2(\mathbb{R})$, donc on aurait $\mathscr{S}_2(\mathbb{R}) = \mathscr{D}_2(\mathbb{R})$ au vu des dimensions, ce qui est absurde puisqu'il existe des matrices diagonalisables non symétriques dans $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$, comme par exemple la matrice suivante qui possède deux valeurs propres distinctes :

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

4. Un sous-espace de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ contenant $\mathscr{D}_2(\mathbb{R})$ contient strictement $\mathscr{S}_2(\mathbb{R})$ grâce aux questions **1** et **3**, donc est de dimension p telle que $3 < p \leqslant 4$, c'est-à-dire $p = 4$. Ainsi le seul sous-espace de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ contenant $\mathscr{D}_2(\mathbb{R})$ est $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.

5. Soient $\Omega = \left\{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},\ (a-d)^2 + 4bc > 0\right\}$ et $F = \left\{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},\ (a-d)^2 + 4bc \geqslant 0\right\}$.

5.1. L'application :

$$\Delta : \begin{array}{ccc} \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} & \longmapsto & (a-d)^2 + 4bc \end{array}$$

est polynomiale en les coefficients des matrices, donc est continue d'après le cours.

Ainsi $\Omega = \Delta^{-1}(\mathbb{R}_+^*)$ est l'image réciproque d'un ouvert par une fonction continue donc Ω est un ouvert, et $F = \Delta^{-1}(\mathbb{R}_+)$ est l'image réciproque d'un fermé par une fonction continue donc F est un fermé.

5.2. Soit $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.

Le polynôme caractéristique χ_M de M est donné par $\chi_M = X^2 - (a+d)X + (ad - bc)$ et a pour discriminant $(a+d)^2 - 4(ad - bc) = (a-d)^2 + 4bc = \Delta(M)$. Ainsi :

- Si $\Delta(M) > 0$, alors χ_M admet deux racines distinctes dans $\mathbb{R}$, donc M est diagonalisable. Donc $\Omega \subset \mathscr{D}_2(\mathbb{R})$.
- Si M est diagonalisable, alors χ_M est scindé sur $\mathbb{R}$, donc admet deux racines réelles, ce qui implique $\Delta(M) \geqslant 0$. Donc $\mathscr{D}_2(\mathbb{R}) \subset F$.

5.3. On utilise la caractérisation séquentielle :

- Supposons $\mathscr{D}_2(\mathbb{R})$ ouvert. Son complémentaire serait alors fermé, ce qui donnerait que toute suite convergente de matrices non diagonalisables converge vers une matrice elle aussi non diagonalisable. Mais les matrices $\frac{1}{n}E_{1,2}$ ne sont pas diagonalisables (voir la question **2**) et convergent, quand n tend vers $+\infty$, vers la matrice nulle, qui est diagonalisable. On obtient une absurdité et $\mathscr{D}_2(\mathbb{R})$ n'est donc pas ouvert.
- Supposons $\mathscr{D}_2(\mathbb{R})$ fermé. Cela donnerait que toute suite convergente de matrices diagonalisables converge vers une matrice elle aussi diagonalisable. Mais les matrices $\frac{1}{n}E_{1,1} + E_{1,2}$ sont diagonalisables puisqu'elles ont deux valeurs propres distinctes $\frac{1}{n}$ et 0 et convergent, quand n tend vers $+\infty$, vers la matrice $E_{1,2}$, qui n'est pas diagonalisable (voir question **2**). On obtient une absurdité et $\mathscr{D}_2(\mathbb{R})$ n'est pas fermé.

DEVOIR À LA MAISON N°4★

Corrigé

1. Soit $x \in \operatorname{Ker}(u - \mathrm{I_E})$. On a $u(x) = x$ et, par récurrence immédiate, $u^k(x) = x$ pour tout $k \geqslant 1$. Ainsi, $r_k(x) = x$ pour tout $k \geqslant 1$ et $\lim_{k\to+\infty} r_k(x) = x$.

2. Soit $x \in \operatorname{Im}(u - \mathrm{I_E})$. Il existe $y \in \mathrm{E}$ tel que $x = (u - \mathrm{I_E})(y)$ et donc $x = u(y) - y$. On fixe $k \geqslant 1$. Pour $\ell \geqslant 0$, on a $u^\ell(x) = u^\ell(u(y) - y) = u^{\ell+1}(y) - u^\ell(y)$ et on obtient par téléscopage :

$$r_k(x) = \frac{1}{k}\sum_{\ell=0}^{k-1}(u^{\ell+1}(y) - u^\ell(y)) = \frac{1}{k}(u^k(y) - y)$$

Avec l'hypothèse de l'énoncé, on montre facilement, par récurrence, que $\|u^k(x)\| \leqslant \|x\|$. On en déduit grâce à l'inégalité triangulaire que :

$$\|r_k(x)\| \leqslant \frac{1}{k}(\|u^k(y)\| + \|y\|) \leqslant \frac{2\|y\|}{k}$$

Ce dernier majorant étant de limite nulle lorsque k tend vers $+\infty$, on conclut par comparaison que $\|r_k(x)\|$ tend vers 0 lorsque k tend vers $+\infty$, c'est-à-dire que $\lim_{k\to+\infty} r_k(x) = 0$.

3. Par théorème du rang, on a $\dim(\operatorname{Ker}(u - \mathrm{I_E})) + \dim(\operatorname{Im}(u - \mathrm{I_E})) = \dim(\mathrm{E})$ de sorte qu'il suffit de montrer que l'on a $\operatorname{Im}(u - \mathrm{I_E}) \cap \operatorname{Ker}(u - \mathrm{I_E}) = \{0\}$. Soit donc $x \in \operatorname{Im}(u - \mathrm{I_E}) \cap \operatorname{Ker}(u - \mathrm{I_E})$. Avec les deux questions qui précèdent, la suite $(r_k(x))_{k\geqslant 1}$ est simultanément de limite x et 0, ce qui entraîne $x = 0$ par unicité de la limite. Cela prouve bien que $\operatorname{Im}(u - \mathrm{I_E}) \cap \operatorname{Ker}(u - \mathrm{I_E}) = \{0\}$.

4. Soit $x \in \mathrm{E}$. On décompose x dans la somme directe précédente. Il existe $y \in \operatorname{Ker}(u - \mathrm{I_E})$ et $z \in \operatorname{Im}(u - \mathrm{I_E})$ tels que $x = y + z$. Pour $k \geqslant 1$, on a alors $r^k(x) = r^k(y) + r^k(z)$ qui tend vers y lorsque k tend vers $+\infty$ d'après les questions **1** et **2**. Ainsi p est l'application qui à x associe la composante y de x selon $\operatorname{Ker}(u - \mathrm{I_E})$ dans la décomposition en somme directe $\mathrm{E} = \operatorname{Ker}(u - \mathrm{I_E}) \oplus \operatorname{Im}(u - \mathrm{I_E})$. On reconnaît la définition de la projection sur $\operatorname{Ker}(u - \mathrm{I_E})$ parallèlement à $\operatorname{Im}(u - \mathrm{I_E})$.

5. En reprenant les calculs précédents, mais en version matricielle, on peut prouver que :

$$\forall \mathrm{X} \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}), \quad \lim_{k\to+\infty} \mathrm{R}_k\mathrm{X} = \mathrm{PX}$$

où P est la matrice dans la base canonique de la projection sur $\operatorname{Ker}(\mathrm{A} - \mathrm{I}_n)$ parallèlement à $\operatorname{Im}(\mathrm{A} - \mathrm{I}_n)$, ces sous-espaces étant supplémentaires dans $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Il reste à prouver que la suite $(\mathrm{R}_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ tend vers P dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ muni d'une norme, le choix de cette norme n'ayant pas d'importance puisque l'espace $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ est de dimension finie. On choisit de travailler avec une norme qui arrange les calculs, par exemple la norme euclidienne de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, c'est-à-dire la norme issue du produit scalaire canonique de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$: on pose $\|\mathrm{M}\|^2 = \operatorname{Tr}({}^t\mathrm{MM})$ pour toute matrice $\mathrm{M} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Fixons une suite $(\mathrm{M}_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ et une matrice M de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant :

$$\forall \mathrm{X} \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}), \quad \lim_{k\to+\infty} \mathrm{M}_k\mathrm{X} = 0$$

et montrons que $\|\mathrm{M}_k\|$ tend vers 0 lorsque k tend vers $+\infty$. En notant $((\mathrm{Y}_i))_{1\leqslant i\leqslant n}$ la base canonique de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, on a par un calcul simple :

$$\forall k \geqslant 1, \quad \forall i \in [\![1, n]\!], \quad (\mathrm{M}_k)_{i,i} = {}^t\mathrm{Y}_i\mathrm{M}_k\mathrm{Y}_i$$

de sorte que, pour $k \geqslant 1$, on a :

$$\|\mathrm{M}_k\|^2 = \operatorname{Tr}({}^t\mathrm{M}_k\mathrm{M}_k) = \sum_{i=1}^{n}(\mathrm{M}_k)_{i,i} = \sum_{i=1}^{n}{}^t\mathrm{Y}_i\mathrm{M}_k\mathrm{Y}_i$$

Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, on a $\mathrm{M}_k\mathrm{Y}_i$ qui tend vers 0 lorsque k tend vers $+\infty$. Par continuité, à $\mathrm{Z} \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ fixé, de l'application $\mathrm{X} \mapsto {}^t\mathrm{ZX}$ (elle est linéaire en dimension finie), on obtient ${}^t\mathrm{Y}_i\mathrm{M}_k\mathrm{Y}_i$ qui tend vers 0 lorsque k tend vers

$+\infty$ pour tout $i \in [\![1,n]\!]$. Par somme, on a $\|M_k\|^2$ et donc $\|M_k\|$ qui tend vers 0 lorsque k tend vers $+\infty$.
En appliquant ce qui précède à la suite de terme général $M_k = R_k - P$, on obtient que $\|R_k - P\|$ tend vers 0 lorsque k tend vers $+\infty$, ce qui est la définition de la convergence de la suite $(R_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ vers P dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Enfin, P étant la matrice d'une projection, on a bien $P^2 = P$.

6. On a par définition du produit matriciel :

$$\forall i \in [\![1,n]\!], \quad (AU)_i = \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} U_j = \sum_{j=1}^{n} a_{i,j}$$

On en déduit bien que :

$$\forall i \in [\![1,n]\!], \quad \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} = 1 \iff \forall i \in [\![1,n]\!], \quad (AU)_i = 1 \iff \forall i \in [\![1,n]\!], \quad (AU)_i = U_i \iff AU = U$$

7. Soient A et B deux matrices stochastiques. On note $C = AB$. Vérifions que C vérifie (C_1) et (C_2). On a d'une part :

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, \quad c_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} \underbrace{a_{i,k}}_{\geqslant 0} \underbrace{b_{k,j}}_{\geqslant 0} \geqslant 0$$

D'autre part, en utilisant la nouvelle caractérisation de (C_2) donnée par la question précédente, on obtient directement $CU = ABU = AU = U$ puisque $AU = BU = U$. Ainsi $C = AB$ vérifie (C_1) et (C_2) et est bien stochastique.

8. On utilise la caractérisation séquentielle des fermés. Soit $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite convergente de matrices stochastiques et A sa limite. Il s'agit de montrer que A est stochastique. Par résultat sur les suites coordonnées, on obtient :

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, \quad A_{i,j} = \lim_{k\to+\infty} \underbrace{(A_k)_{i,j}}_{\geqslant 0} \geqslant 0$$

de sorte que tous les coefficients de A sont positifs. De plus, on a $A_k U = U$ pour tout $k \in \mathbb{N}$, de sorte qu'en passant à la limite, par continuité de $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mapsto MU \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ (linéaire en dimension finie), on a $AU = U$. Ainsi A est stochastique et $\mathcal{E}$ est fermé.
Montrons maintenant que $\mathcal{E}$ est convexe. On se donne A et B deux matrices stochastiques et $\lambda \in [0,1]$ et il s'agit de montrer que $M = \lambda A + (1-\lambda)B \in \mathcal{E}$. La positivité des coefficients de A et B entraîne celle des coefficients de M. De plus $MU = \lambda AU + (1-\lambda)BU = \lambda U + (1-\lambda)U = U$ ce qui donne (C_2) pour M qui est donc stochastique. On a ainsi prouvé que $\mathcal{E}$ est convexe.

9. Soit $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. On a :

$$\forall i \in [\![1,n]\!], \quad |(AX)_i| = \left| \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} x_j \right| \leqslant \sum_{j=1}^{n} |a_{i,j}| \cdot |x_j| \leqslant \|x\|_\infty \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} = \|x\|_\infty$$

où l'on a utilisé le fait que A vérifie la condition (C_2). Ceci étant vrai pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, on a $\|AX\|_\infty \leqslant \|X\|_\infty$.

10. Notons $A^p = (\alpha_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$. La matrice A^p est une matrice stochastique par la question **7** et à coefficients strictement positifs par hypothèse. Soit $X \in \mathrm{Ker}(A^p - I_n)$ et s un indice tel que x_s est le maximum des $(x_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$. On a $A^p X = X$ et, en écrivant le coefficient d'indice s :

$$x_s = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{s,i} x_i$$

Si, par l'absurde, il existait un indice $p \in [\![1,n]\!]$ tel que $x_p < x_s$ alors, on aurait :

$$x_s = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{s,i} x_i < x_s \sum_{i=1}^{n} \alpha_{s,i} = x_s$$

où l'on se sert de la positivité des $(\alpha_{s,i})_{1\leqslant i\leqslant n}$ pour justifier que les inégalités $x_i \leqslant x_s$ restent dans le même sens et du fait que $\alpha_{s,p} > 0$ pour assurer que le terme x_p donnant une inégalité stricte est bien présent. Ceci est absurde donc les $(x_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ sont tous égaux et $X \in \mathrm{Vect}(U)$. Ainsi $\mathrm{Ker}(A^p - I_n) \subset \mathrm{Vect}(U)$. Mais, à nouveau, A^p étant une matrice stochastique, on a $U \in \mathrm{Ker}(A - I_p)$. Ainsi $\mathrm{Ker}(A^p - I_n) = \mathrm{Vect}(U)$ est de dimension 1.

11. On sait déjà que $\mathrm{Vect}(U) \subset \mathrm{Ker}(A - I_n)$ car A est stochastique. Si $AX = X$ alors on montre par récurrence que $A^k X = X$ pour tout $k \geqslant 1$, ce qui donne en particulier $A^p X = X$. La question précédente montre que $X \in \mathrm{Vect}(U)$ et ainsi $\mathrm{Ker}(A - I_n) = \mathrm{Vect}(U)$.

12. On fixe $k \geqslant 1$. Les matrices $(\mathrm{A}^\ell)_{\ell\geqslant 0}$ sont toutes stochastiques par la question **7**. La matrice R_k est à coefficients positifs comme somme de matrices à coefficients positifs et :

$$\mathrm{R}_k\mathrm{U} = \frac{1}{k}\sum_{\ell=0}^{k-1}\mathrm{A}^\ell\mathrm{U} = \frac{1}{k}\sum_{\ell=0}^{k-1}\mathrm{U} = \mathrm{U}$$

de sorte que R_k est bien stochastique.

13. Les questions **5** et **9** montrent que $(\mathrm{R}_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ est convergente de limite P vérifiant $\mathrm{P}^2 = \mathrm{P}$. De plus, les questions **12** et **8** ($\mathscr{E}$ est fermé) montrent que P est stochastique. Enfin, il a été prouvé dans la partie précédente que P est la matrice de la projection sur $\mathrm{Ker}(\mathrm{A}-\mathrm{I}_n)$ parallèlement à $\mathrm{Im}(\mathrm{A}-\mathrm{I}_n)$. On a donc $\mathrm{Im}(\mathrm{P}) = \mathrm{Ker}(\mathrm{A}-\mathrm{I}_n) = \mathrm{Vect}(\mathrm{U})$ par la question **11** et P est de rang 1.

14. Puisque $\mathrm{Im}(\mathrm{P}) = \mathrm{Vect}(\mathrm{U})$, toutes les colonnes de P sont multiples de U et, pour chaque $i \in [\![1, n]\!]$, il existe λ_i telle que la colonne i s'écrive $\lambda_i\mathrm{U}$. En posant définissant la matrice ligne $\mathrm{L} = (\lambda_1 \cdots \lambda_n)$ on a alors $\mathrm{P} = \mathrm{UL}$. Comme toutes les coordonnées de U valent 1, toutes les lignes de P valent L. Comme P est stochastique, L l'est aussi.

15. Fixons $k \geqslant 1$. Remarquons que :

$$\mathrm{R}_k\mathrm{A} = \frac{1}{k}\sum_{\ell=1}^{k}\mathrm{A}^\ell = \frac{1}{k}((k+1)\mathrm{R}_{k+1} - \mathrm{I}_n) = \frac{k+1}{k}\mathrm{R}_{k+1} - \frac{1}{k}\mathrm{I}_n$$

En faisant tendre k vers $+\infty$, on obtient directement $\mathrm{PA} = \mathrm{P}$.
On rappelle que P est une matrice dont toutes les lignes sont égale à L. La matrice PA est ainsi une matrice dont toutes les lignes sont LA. L'égalité $\mathrm{PA} = \mathrm{P}$ donne ainsi $\mathrm{LA} = \mathrm{L}$. Si Y est une matrice ligne, $\mathrm{YA} = \mathrm{Y}$ s'écrit aussi ${}^t\mathrm{A}{}^t\mathrm{Y} = {}^t\mathrm{Y}$ ou encore $({}^t\mathrm{A} - \mathrm{I}_n){}^t\mathrm{Y} = 0$. Or, avec la question **11** et le théorème du rang, $\mathrm{A} - \mathrm{I}_n$ est de rang $n-1$ et il en est de même de ${}^t\mathrm{A} - \mathrm{I}_n$. Le noyau de ${}^t\mathrm{A} - \mathrm{I}_n$ est ainsi de dimension 1. Il contient la matrice ${}^t\mathrm{L}$ qui est non nulle (car sinon $\mathrm{P} = 0$). Ainsi, les matrices ligne Y vérifiant $\mathrm{YA} = \mathrm{Y}$ sont les multiples de L. La somme des coefficients de $\lambda\mathrm{L}$ ne valant 1 que si $\lambda = 1$, on a finalement que L est la seule ligne stochastique telle que $\mathrm{LA} = \mathrm{L}$.

16. On montre par récurrence que $\mathrm{LA}^k = \mathrm{L}$ pour tout $k \geqslant 1$. En particulier, on a $\mathrm{LA}^p = \mathrm{L}$. Si, par l'absurde, on avait $\lambda_i = 0$, alors en regardant le i−ème coefficient de $\mathrm{LA}^p = \mathrm{L}$, on aurait, en notant $\mathrm{A}^p = (\alpha_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$:

$$\sum_{k=1}^{n}\lambda_k\alpha_{k,i} = 0$$

Les coefficients $(\alpha_{k,i})_{1\leqslant i\leqslant n}$ étant strictement positifs et les $(\lambda_k)_{1\leqslant k\leqslant n}$ positifs non tous nuls, ceci est absurde. Ainsi L est à coefficients strictement positifs.

17. On sait que $\mathrm{Ker}(\mathrm{A}-\mathrm{I}_n) \oplus \mathrm{Im}(\mathrm{A}-\mathrm{I}_n) = \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ par la question **3**. Les espaces $\mathrm{F} = \mathrm{Ker}(\mathrm{A}-\mathrm{I}_n)$ et $\mathrm{G} = \mathrm{Im}(\mathrm{A}-\mathrm{I}_n)$ sont stables par l'endomorphisme canoniquement associé à A puisque ce sont des noyaux et images de polynômes en A. En notant $u_\mathrm{F} \in \mathscr{L}(\mathrm{F})$ et $u_\mathrm{G} \in \mathscr{L}(\mathrm{G})$ les endomorphismes induits, comme $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}) = \mathrm{F} \oplus \mathrm{G}$, on a grâce à un raisonnement avec des matrices par blocs que $\chi_u = \chi_{u_\mathrm{F}}\chi_{u_\mathrm{G}}$. Puisque F est de dimension 1 et que $u_\mathrm{F} = \mathrm{Id}_\mathrm{F}$, on a $\chi_{u_\mathrm{F}} = \mathrm{X} - 1$. Comme $\mathrm{F} \cap \mathrm{G} = \{0\}$, $u_\mathrm{G} - \mathrm{Id}_\mathrm{G}$ est inversible et 1 n'est pas racine de χ_{u_G}. De tout cela, on déduit que 1 est racine simple de χ_u et donc que 1 est valeur propre simple de A.