DEVOIR SURVEILLÉ N°3

CORRIGÉ

EXERCICE 1 – MATRICES DE RANG 1

PARTIE A

1. Après calculs on a :

$$A_0 = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

La première colonne de A_0 est non nulle et les autres colonnes lui sont proportionnelles donc $\mathrm{rg}(A_0) = 1$.

2. Comme $\mathrm{rg}(A_0) = 1$, le théorème du rang donne que $\dim(\mathrm{Ker}\, A_0) = 3$. Ainsi $E_0(A_0) = \mathrm{Ker}(A_0) \neq \{0\}$ et 0 est valeur propre de A_0. On trouve $E_0(A_0) = \mathrm{Ker}(A_0)$ en résolvant l'équation $A_0X = 0$ pour $X \in \mathscr{M}_{4,1}(\mathbb{R})$. Il vient après calculs :

$$E_0(A_0) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$$

3. **3.1.** Un calcul matriciel donne $A_0U_0 = -2U_0$.

3.2. La question précédente montre que $U_0 \neq 0$ est un vecteur propre de A_0 associée à la valeur propre -2. On en déduit que $\dim(E_{-2}(A_0)) \geqslant 1$. Comme la somme des dimensions des sous-espaces propres doit être inférieure à 4 par le cours et que $\dim(E_0(A_0)) = \dim(\mathrm{Ker}\, A_0) = 3$ par la question précédente, on peut conclure que $\dim(E_{-2}(A_0)) = 1$ et que $\dim(E_0(A_0)) + \dim(E_{-2}(A_0)) = 3 + 1 = 4$ de sorte que A_0 est diagonalisable.

3.3. Nous avons déterminé une base de $E_0(A_0)$ à la question **2** et une base de $E_{-2}(A_0)$ à la question précédente. En concaténant ces bases, on obtient une base de $\mathscr{M}_{4,1}(\mathbb{R})$ formée de vecteurs propres de A_0. On peut donc écrire que $A_0 = PDP^{-1}$ avec :

$$D = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

PARTIE B

4. Comme le rang de A est 1, A n'est pas nulle et la colonne C existe bien. De plus, toujours grâce au fait que $\mathrm{rg}(A) = 1$, toutes les colonnes de A sont proportionnelles à cette colonne C. Ainsi il existe une matrice ligne non nulle $L = (\ell_1 \cdots \ell_n)$ telle que les colonnes de A soient $\ell_1 C$, $\ell_2 C$, ..., $\ell_n C$. Cela se traduit matriciellement par l'égalité $A = CL$.

5. Pour $i \in [\![1, n]\!]$, le i−ème coefficient diagonal de A est $c_i \ell_i$. Ainsi, en identifiant $\mathbb{R}$ et $\mathscr{M}_1(\mathbb{R})$, il vient :

$$\mathrm{Tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} c_i \ell_i = LC$$

On en déduit que $A^2 = (CL)^2 = (CL)(CL) = C(LC)L = C(\mathrm{Tr}(A))L = \mathrm{Tr}(A)CL = \mathrm{Tr}(A)A$.

6. Soit λ une valeur propre de la matrice A et X un vecteur propre associé. On a donc $AX = \lambda X$. On en déduit immédiatement que $A^2X = \lambda^2 X$. Avec la relation de la question précédente, cela donne $\lambda^2 X = \mathrm{Tr}(A)AX = \mathrm{Tr}(A)\lambda X$. On arrive donc à $(\lambda^2 - \mathrm{Tr}(A)\lambda)X = 0$ et par suite $(\lambda^2 - \mathrm{Tr}(A)\lambda) = 0$ puisque $X \neq 0$. On en déduit $\lambda(\lambda - \mathrm{Tr}(A)) = 0$ et donc $\lambda \in \{0,\ \mathrm{Tr}(A)\}$.

7. Le réel 0 est valeur propre de A car A n'est pas inversible puisque son rang est $1 < n$. Puisque $E_0(A) = \mathrm{Ker}(A)$, le théorème du rang affirme que la dimension de l'espace propre associé à la valeur propre 0 est $n - \mathrm{rg}(A) = n - 1$.

8. Soit $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \mathrm{Ker}(A)$. Le vecteur X existe puisque $\mathrm{Ker}(A) \neq \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ sans quoi on aurait $\mathrm{Ker}(A) = \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et donc $A = 0$ puis $\mathrm{rg}(A) = 0 \neq 1$. On a alors $AX \neq 0$ et $A^2X = \mathrm{Tr}(A)AX$ grâce à la question **5**. Ainsi $\mathrm{Tr}(A)$ est valeur propre de A associée au vecteur propre AX.

9. On sait que le spectre de A est $\{0,\ \mathrm{Tr}(A)\}$.

   - Si $\mathrm{Tr}(A) = 0$, alors A admet une unique valeur propre, à savoir 0. Dans ce cas A est diagonalisable si et seulement si $A = 0I_n = 0$. Or $A \neq 0$ puisque $\mathrm{rg}(A) = 1$. Ainsi $\mathrm{Tr}(A) = 0$ implique A non diagonalisable de sorte que A diagonalisable implique $\mathrm{Tr}(A) \neq 0$ par contraposée.
   - Si $\mathrm{Tr}(A) \neq 0$, alors A admet deux valeurs propres 0 et $\mathrm{Tr}(A)$. On sait par le théorème du rang que l'on a $\dim(E_0(A)) = \dim(\mathrm{Ker}(A)) = n - \mathrm{rg}(A) = n - 1$ et que $\dim(E_{\mathrm{Tr}(A)}(A)) \geqslant 1$. Comme la somme des dimensions des sous-espaces propres doit être inférieure à n, on a forcément $\dim(E_{\mathrm{Tr}(A)}(A)) = 1$ et il vient donc $\dim(E_0(A)) + \dim(E_{\mathrm{Tr}(A)}(A)) = n - 1 + 1 = n$ et A est diagonalisable.

   Finalement, A est diagonalisable si et seulement si $\mathrm{Tr}(A) \neq 0$.

Partie C

10. Comme $f \circ f \neq \tilde{0}$ il existe $v \in E$ tel que $f \circ f(v) \neq 0$. Comme $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}(u)$, il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $f(v) = \alpha u$. Ainsi, $0 \neq f \circ f(v) = f(\alpha u) = \alpha f(u)$. D'où $f(u) \neq 0$.

11. Comme $f(u) \in \mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}(u)$, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $f(u) = \lambda u$. Comme $f(u) \neq 0$, on en déduit que $u \neq 0$ et que $\lambda \neq 0$. Par suite, λ est une valeur propre non nulle de f associée au vecteur propre u.

12. Si on note A la matrice de l'endomorphisme f de E dans une base donnée, l'étude de la **Partie C** donne que $\mathrm{sp}(A) = \{0, \mathrm{Tr}(A)\}$. Comme A est une matrice possédant une valeur propre non nulle, on en déduit que $\mathrm{Tr}(A) \neq 0$ et donc que A est diagonalisable par la question **9**. On conclut que f est diagonalisable également.

Problème – Matrices de Kac

Partie I – La dimension 3

1. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Le calcul du polynôme caractéristique de A donne :

$$\begin{aligned}
\chi_A(\lambda) = \det(\lambda I_3 - A) = \begin{vmatrix} \lambda & -1 & 0 \\ -2 & \lambda & -2 \\ 0 & -1 & \lambda \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} \lambda-2 & \lambda-2 & \lambda-2 \\ -2 & \lambda & -2 \\ 0 & -1 & \lambda \end{vmatrix} \quad L_1 \leftarrow L_1 + L_2 + L_3 \\
&= \begin{vmatrix} \lambda-2 & 0 & 0 \\ -2 & \lambda+2 & 0 \\ 0 & -1 & \lambda \end{vmatrix} \quad \begin{matrix} C_3 \leftarrow C_3 - C_1 \\ C_2 \leftarrow C_2 - C_1 \end{matrix} \\
&= (\lambda-2)(\lambda+2)\lambda
\end{aligned}$$

   où l'on a utilisé le fait que le déterminant d'une matrice triangulaire est le produit des éléments diagonaux.

2. Le polynôme caractéristique de A est scindé et à racines simples, donc A est diagonalisable. Les valeurs propres de A sont les racines de son polynôme caractéristique, c'est-à-dire 0, 2 et -2. De plus, les valeurs propres étant simples, le cours assure que les espaces propres associés sont de dimension 1.

3. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Par opérations sur les colonnes, les lignes puis par développement par rapport à la première colonne :

$$\begin{aligned}
\chi_B(\lambda) = \det(\lambda I_3 - B) = \begin{vmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ -2 & \lambda & 2 \\ 0 & -1 & \lambda \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 2 \\ \lambda & -1 & \lambda \end{vmatrix} \quad C_1 \leftarrow C_1 + C_3 \\
&= \begin{vmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 2 \\ 0 & -2 & \lambda \end{vmatrix} \quad L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \\
&= \lambda \begin{vmatrix} \lambda & 2 \\ -2 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda(\lambda^2+4)
\end{aligned}$$

   On conclut que $\chi_B(\lambda) = \lambda(\lambda^2 + 4) = \lambda(\lambda + 2i)(\lambda - 2i)$. On a alors :

$$i\chi_B(i\lambda) = i(i\lambda)(i\lambda + 2i)(i\lambda - 2i) = i^4\lambda(\lambda+2)(\lambda-2) = \lambda(\lambda+2)(\lambda-2) = \chi_A(\lambda)$$

4. Étant donné que χ_B n'est pas scindé sur $\mathbb{R}$, la matrice B n'est pas diagonalisable sur $\mathbb{R}$. Par contre, le polynôme caractéristique de B est scindé et à racines simples sur $\mathbb{C}$, donc B est diagonalisable sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$. Les valeurs propres complexes de B sont les racines de son polynôme caractéristique, c'est-à-dire 0, $2i$ et $-2i$. De plus, les valeurs propres étant simples, le cours assure que les espaces propres associés sont de dimension 1.

5. Notons que $i^{-1} = 1/i = i/i^2 = -i$. Ainsi, puisque l'inverse d'une matrice diagonale s'obtient en inversant ses coefficients diagonaux :

$$D^{-1}AD = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -i & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & i & 0 \\ -2i & 0 & 2i \\ 0 & -i & 0 \end{pmatrix} = -iB$$

6. De la même façon qu'à la question précédente, on obtient :

$$\Delta^{-1}A\Delta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2} & 0 \\ \sqrt{2} & 0 & \sqrt{2} \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}$$

Partie II – Étude d'un endomorphisme

7. On se donne des scalaires $\alpha_0, \dots, \alpha_n$ tels que $\alpha_0 f_0 + \cdots + \alpha_n f_n = 0$, c'est-à-dire que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \alpha_0(\sin(x))^n + \alpha_1(\sin(x))^{n-1}\cos(x) + \cdots + \alpha_n(\cos(x))^n = 0$$

En appliquant en $x = 0$, cette égalité implique $\alpha_n = 0$. L'égalité devient alors :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \alpha_0(\sin(x))^n + \alpha_1(\sin(x))^{n-1}\cos(x) + \cdots + \alpha_{n-1}(\cos(x))^{n-1}\sin(x) = 0$$

Pour tout $x \in]\,0, \pi\,[$, on a $\sin(x) \neq 0$ et on peut donc diviser cette égalité par $\sin(x)$ pour obtenir :

$$\forall x \in]\,0, \pi\,[, \quad \alpha_0(\sin(x))^{n-1} + \alpha_1(\sin(x))^{n-2}\cos(x) + \cdots + \alpha_{n-1}(\cos(x))^{n-1} = 0.$$

On ne peut plus prendre $x = 0$ puisque cette égalité est valable pour $x \in]0, \pi[$, mais en prenant la limite quand $x \to 0^+$ on obtient $\alpha_{n-1} = 0$. Ainsi on a $\alpha_n = \alpha_{n-1} = 0$.

En itérant ce procédé, on prouve que tous les scalaires $(\alpha_k)_{k \in [\![0,n]\!]}$ sont nuls. Ainsi la famille $(f_0, \dots, f_n)$ est libre. De plus, la famille $(f_0, \dots, f_n)$ engendre V_n donc on en déduit que c'est une base de V_n. On a ainsi $\dim(V_n) = n + 1$.

8. Soit $k \in [\![0, n]\!]$.

- Si $k = 0$ alors $f_0' = n\sin^{n-1} \cdot \cos = nf_1 \in V_n$;
- Si $k = n$ alors $f_n' = -n\cos^{n-1}\sin = -nf_{n-1} \in V_n$;
- Si $k \in [\![1, n-1]\!]$, on a :

$$\begin{aligned} f_k' &= -k\sin \cdot \cos^{k-1} \cdot \sin^{n-k} + \cos^k \cdot (n-k)\cos\sin^{n-k-1} \\ &= -k\cos^{k-1}\sin^{n-(k-1)} + (n-k)\cos^{k+1}\sin^{n-(k+1)} \\ &= -kf_{k-1} + (n-k)f_{k+1} \end{aligned}$$

  donc $f_k' \in V_n$ en tant que combinaison linéaire de vecteurs de V_n.

Nous avons donc bien démontré que $f_k' \in V_n$ pour tout $k \in [\![0, n]\!]$. Par linéarité de la dérivation et étant donné que la famille $(f_k)_{k \in [\![0,n]\!]}$ est génératrice de V_n, on en déduit que $f' \in V_n$ pour tout $f \in V_n$. Cela prouve que l'application $\varphi_n : f \mapsto f'$ est un endomorphisme de V_n. Les calculs ci-dessus peuvent s'écrire sous la forme :

$$\varphi_n(f_0) = nf_1, \qquad \forall k \in [\![1, n-1]\!], \quad \varphi_n(f_k) = -kf_{k-1} + (n-k)f_{k+1}, \qquad \varphi_n(f_n) = -nf_{n-1}$$

Cela permet d'affirmer que la matrice de φ_n dans la base $(f_0, f_1, \dots, f_n)$ est :

$$B_n = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ n & 0 & -2 & \ddots & & \vdots \\ 0 & n-1 & 0 & -3 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & 2 & 0 & -n \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

9. Un calcul direct donne :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g_k(x) = e^{ikx}e^{i(k-n)x} = (e^{ix})^k(e^{-ix})^{n-k} = (\cos(x) + i\sin(x))^k(\cos(x) - i\sin(x))^{n-k}$$

10. Soit $k \in [\![0, n]\!]$. D'après la formule du binôme de Newton :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad (\cos(x) + i\sin(x))^k(\cos(x) - i\sin(x))^{n-k}$$
$$= \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} (\cos(x))^j (i\sin(x))^{k-j} \cdot \sum_{\ell=0}^{n-k} \binom{n-k}{\ell} (\cos(x))^\ell (-i\sin(x))^{n-k-\ell}$$

On a ainsi :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g_k(x) = \sum_{j=0}^{k} \sum_{\ell=0}^{n-k} (-1)^{n-k-\ell} i^{n-j-\ell} \binom{k}{j} \binom{n-k}{\ell} (\cos(x))^{\ell+j} (\sin(x))^{n-(j+\ell)},$$

Ceci peut se reformuler sous la forme :

$$g_k = \sum_{j=0}^{k} \sum_{\ell=0}^{n-k} (-1)^{n-k-\ell} i^{n-j-\ell} \binom{k}{j} \binom{n-k}{\ell} f_{\ell+j}$$

On a donc démontré que, pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, la fonction g_k est combinaison linéaire des fonctions de la famille $(f_0, \dots, f_n)$ qui engendre V_n, de sorte que $g_k \in \mathrm{V}_n$.

11. Pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, on a $g_k' = i(2k - n)g_k$ soit :

$$\forall k \in [\![0, n]\!], \quad \varphi_n(g_k) = i(2k - n)g_k$$

Comme de plus $g_k \neq 0$, ceci démontre que, pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, g_k est un vecteur propre de φ_n, associé à la valeur propre $i(2k - n)$. Cela fournit $n + 1$ valeurs propres distinctes de φ_n, qui est défini sur un espace vectoriel de dimension $n + 1$ d'après la question **7**. Ainsi φ_n est diagonalisable.

On a donc $\mathrm{Sp}(\varphi_n) = \{i(2k - n),\ k \in [\![0, n]\!]\}$ et, les valeurs propres étant toutes simples, les sous-espaces propres de φ_n sont de dimension 1. Puisqu'ils sont de dimension 1 et que, comme cela a été vu précédemment, g_k est un vecteur propre associé à $i(2k - n)$ pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, on en déduit que $\mathrm{E}_{i(2k-n)}(\varphi_n) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{C}}(g_k)$.

12. L'application linéaire φ_n est définie entre deux espaces de même dimensions donc elle est bijective si et seulement si elle est injective ce qui équivaut à $\mathrm{Ker}(\varphi_n) = \{0\}$, c'est-à- dire au fait que 0 n'est pas une de ses valeurs propres.

Connaissant les valeurs propres de φ_n grâce à la question précédente, on observe que 0 est valeur propre de φ_n si et seulement s'il existe $k \in [\![0, n]\!]$ tel que $2k - n = 0$, ce qui équivaut à l'existence de $k \in [\![0, n]\!]$ tel que $n = 2k$. Ainsi φ_n est un automorphisme de V_n si et seulement si n est un entier impair.

13. Par la question **10**, on sait que, pour $k \in [\![0, n]\!]$:

$$g_k = \sum_{j=0}^{k} \sum_{\ell=0}^{n-k} (-1)^{n-k-\ell} i^{n-j-\ell} \binom{k}{j} \binom{n-k}{\ell} f_{\ell+j}$$

Avec $k = n$, On obtient alors :

$$g_n = \sum_{j=0}^{n} i^{n-j} \binom{n}{j} f_j$$

Ainsi le vecteur colonne représentant g_n dans la base $(f_0, \dots, f_n)$ est :

$$\begin{pmatrix} i^n\binom{n}{0} \\ \vdots \\ i^{n-j}\binom{n}{j} \\ \vdots \\ i^0\binom{n}{n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_0 \\ \vdots \\ q_j \\ \vdots \\ q_n \end{pmatrix} \qquad \text{où} \qquad \forall j \in [\![0, n]\!], \quad q_j = i^{n-j}\binom{n}{j}$$

Puisque B_n est la matrice de φ_n dans la base $(f_0, \dots, f_n)$ par la question **8**, le sous-espace propre de B_n associé à la valeur propre in est la traduction matricielle de l'espace propre de φ_n associé à la valeur propre in. Comme $\mathrm{E}_{in}(\varphi_n) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{C}}(g_n)$ par la question **11**, on obtient que :

$$\mathrm{Ker}(\mathrm{B}_n - in\mathrm{I}_{n+1}) = \mathrm{E}_{in}(\mathrm{B}_n) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{C}}\left(\begin{pmatrix} q_0 \\ q_1 \\ \vdots \\ q_n \end{pmatrix}\right)$$

Partie III – Les matrices de Kac de taille $n+1$

14. Soit $(k,\ell) \in [\![1,p]\!]^2$. On a :

$$(\mathrm{DM})_{k,\ell} = \sum_{t=1}^{n} d_{k,t} m_{t,\ell}$$

Puisque $d_{k,t} = 0$ dès que $k \neq t$, le coefficient $(\mathrm{DM})_{k,\ell}$ vaut $d_{k,k} m_{k,\ell}$.

De la même façon, on trouve que $(\mathrm{MD})_{k,\ell} = d_{\ell,\ell} m_{k,\ell}$.

15. La matrice D_n^{-1} est une matrice diagonale dont les coefficients diagonaux sont les $d_{s,s}^{-1} = (i^{-1})^{s-1} = (-i)^{s-1}$. En utilisant la question précédente qui donne les coefficients de la multiplication de A_n par les matrices diagonales D_n^{-1} et D_n, on trouve que pour tout $(k,\ell) \in [\![1,n+1]\!]^2$ le coefficient en position (k,ℓ) de $\mathrm{D}_n^{-1}\mathrm{A}_n\mathrm{D}_n$, que l'on note $b_{k,\ell}$ dans la suite, est :

$$b_{k,\ell} = d_{k,k}^{-1} d_{\ell,\ell} a_{k,\ell} = (-i)^{k-1} i^{\ell-1} a_{k,\ell} = (-1)^{k-1} i^{k+\ell-2} a_{k,\ell} = (-1)^{k-1} i^{k+\ell} a_{k,\ell}$$

En utilisant la définition des $a_{k,\ell}$ donnée dans l'énoncé, et le fait que $i^{2k} = (i^2)^k = (-1)^k$, on en déduit :

$$\begin{cases} b_{k,k+1} & = (-1)^{k-1} i^{2k+1} a_{k,k+1} = -ik & \text{si } 1 \leqslant k \leqslant n \\ b_{k,k-1} & = (-1)^{k-1} i^{2k-1} a_{k,k-1} = i(n-k+2) & \text{si } 2 \leqslant k \leqslant n+1 \\ b_{k,\ell} & = 0 & \text{dans tous les autres cas} \end{cases}$$

On reconnaît alors que $\mathrm{D}_n^{-1}\mathrm{A}_n\mathrm{D}_n = -i\mathrm{B}_n$.

Ceci démontre notamment que les matrices A_n et $-i\mathrm{B}_n$ sont semblables, donc elles ont le même polynôme caractéristique. On en déduit :

$$\chi_{\mathrm{A}_n}(\mathrm{X}) = \chi_{-i\mathrm{B}_n}(\mathrm{X}) = \det(\mathrm{X} + i\mathrm{B}_n) = (-i)^{n+1}\det((-i)^{-1}\mathrm{X} - \mathrm{B}_n) = (-i)^{n+1}\chi_{\mathrm{B}_n}(i\mathrm{X})$$

en utilisant encore une fois le fait que $i^{-1} = -i$.

16. La question précédente montre que A_n et $-i\mathrm{B}_n$ sont semblables. De plus B_n est diagonalisable parce que φ_n l'est par la question **11**. Plus précisément, avec la description du spectre qui a été faite dans la même question, il existe $\mathrm{P} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ telle que :

$$\mathrm{B}_n = \mathrm{P}\begin{pmatrix} -in & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & i(2k-n) & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & in \end{pmatrix}\mathrm{P}^{-1}$$

La matrice P peut être choisie comme la matrice de passage de la base $(f_0, \ldots, f_n)$ vers la base de vecteurs propres $(g_0, \ldots, g_n)$ de φ_n. On a alors :

$$-i\mathrm{B}_n = \mathrm{P}\begin{pmatrix} i^2 n & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & -i^2(2k-n) & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & -i^2 n. \end{pmatrix}\mathrm{P}^{-1} = \mathrm{P}\begin{pmatrix} -n & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & (2k-n) & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & n \end{pmatrix}\mathrm{P}^{-1}$$

En notant Δ_n la matrice diagonale du membre de droite, et avec la relation de la question précédente, on a :

$$\mathrm{A}_n = \mathrm{D}_n(-i\mathrm{B}_n)\mathrm{D}_n^{-1} = (\mathrm{D}_n\mathrm{P})\Delta_n(\mathrm{D}_n\mathrm{P})^{-1}$$

Ainsi A_n est semblable à Δ_n, donc elles ont même polynôme caractéristique et mêmes valeurs propres. On en déduit :

$$\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(\mathrm{A}_n) = \mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(\Delta_n) = \{2k-n,\ k \in [\![0,n]\!]\}$$

Il en découle que $\mathrm{A}_n \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ admet $n+1$ valeurs propres réelles distinctes. Ainsi A_n est diagonalisable sur $\mathbb{R}$.

Pour obtenir le sous-espace propre de A_n associé à la valeur propre n, la relation de similitude $A = (D_nP)\Delta_n(D_nP)^{-1}$ montre qu'il suffit de prendre le sous-espace engendré par la dernière colonne de (D_nP) (en effet n est le dernier coefficient diagonal de Δ_n). Comme P est la matrice de la famille $(g_0,\dots,g_n)$ dans la base $(f_0,\dots,f_n)$, l'égalité :

$$g_n = \sum_{j=0}^{n} i^{n-j}\binom{n}{j} f_j$$

de la question **13** et la multiplication par la matrice diagonale D_n donnent que la dernière colonne de D_nP est :

$$\begin{pmatrix} 1\cdot i^n\binom{n}{0} \\ \vdots \\ i^n\cdot\binom{n}{n}\end{pmatrix} = i^n \begin{pmatrix} \binom{n}{0} \\ \vdots \\ \binom{n}{n}\end{pmatrix}$$

On conclut alors bien que :

$$\mathrm{Ker}(A_n - nI_{n+1}) = \mathrm{Vect}\begin{pmatrix} p_0 \\ p_1 \\ \vdots \\ p_n\end{pmatrix} \qquad \text{où} \qquad \forall k \in [\![0,n]\!], \quad p_k = \binom{n}{k}$$

Exercice 2 – Classe de similitude des matrices nilpotentes

Partie I – Réduction d'une matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ nilpotente d'indice 2

1. Soit $\mathscr{B}$ une base de E et u un endomorphisme de E, notons $M = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u)$. Si u est nilpotent d'indice 1, cela signifie d'après l'énoncé que $M^1 = M = 0$, donc que $u = 0$. Ainsi, il y a un unique endomorphisme nilpotent d'indice de nilpotence égal à 1 et c'est l'endomorphisme nul.

2. Avec les notations de la question **1**, puisque $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u^k) = M^k$ pour tout entier naturel k, le fait que u soit nilpotent d'indice p signifie que M l'est, ce qui donne $M^p = 0$ et, par minimalité de p, $M^{p-1} \neq 0,\dots,M \neq 0$. Ainsi, $u^p = 0$ et $u^{p-1} \neq 0$. Comme $u^{p-1} \neq 0$, on en déduit l'existence d'un vecteur x de E tel que $u^{p-1}(x) \neq 0$.

3. Soit une famille de scalaires $(\lambda_k)_{0\leqslant k\leqslant p-1} \in \mathbb{C}^p$ telle que :

$$\sum_{k=0}^{p-1} \lambda_k u^k(x) = 0 \qquad (\star)$$

Si on suppose par l'absurde que $(\lambda_0,\dots,\lambda_{p-1}) \neq (0,\dots,0)$, on peut définir l'entier $i = \min(\{0 \leqslant k \leqslant p-1,\ \lambda_k \neq 0\})$ de sorte que $\lambda_0 = \dots = \lambda_{i-1} = 0$ et $\lambda_i \neq 0$. En composant la relation $(\star)$ par u^{p-1-i}, on aurait, par linéarité de u :

$$\sum_{k=0}^{p-1} \lambda_k u^{p-1-i+k}(x) = u(0) = 0$$

Cela donnerait :

$$\sum_{k=i}^{p-1} \lambda_k u^{p-1-i+k}(x) = 0$$

Comme $u^p = 0$, la relation précédente se restreint à $\lambda_i u^{p-1}(x) = 0$. C'est absurde puisque $\lambda_i \neq 0$ et $u^{p-1}(x) \neq 0$ d'après la question **2**. Ainsi, on a $(\lambda_0,\dots,\lambda_{p-1}) = (0,\dots,0)$ et la famille $(u^k(x))_{0\leqslant k\leqslant p-1}$ est libre.

Cette famille libre admet p vecteurs dans l'espace E de dimension $n = 2$. On sait d'après le cours que le nombre de vecteurs de cette famille libre doit être inférieur à la dimension de l'espace donc $p \leqslant 2$. Puisque $p \geqslant 2$ par hypothèse, il vient $p = 2$.

4. Comme u est nilpotent d'indice 2 d'après la question précédente, $u \neq 0$ et $u^2 = u \circ u = 0$.

- Prouvons que $\mathrm{Im}(u) \subset \mathrm{Ker}(u)$. Si $y = u(x) \in \mathrm{Im}(u)$ alors $u(y) = u^2(x) = 0$ de sorte que $y \in \mathrm{Ker}(u)$.
- La relation précédente donne $\dim(\mathrm{Im}(u)) = \mathrm{rg}(u) \leqslant \dim(\mathrm{Ker}(u))$. De plus, la formule du rang appliquée à l'endomorphisme u de $\mathbb{R}^2$ donne $2 = \dim(\mathrm{Im}(u)) + \dim(\mathrm{Ker}(u))$. Puisque $\mathrm{rg}(u) > 0$ car $u \neq 0$, on ne peut avoir que $\dim(\mathrm{Im}(u)) = \dim(\mathrm{Ker}(u)) = 1$.

Par inclusion et égalité des dimensions, on a prouvé que $\mathrm{Im}(u) = \mathrm{Ker}(u)$.

5. D'après les questions **2** et **3**, il existe un vecteur x de E tel que $(x, u(x))$ soit libre. Puisque E est de dimension 2, on a même que $\mathscr{B} = (x, u(x))$ est une base de E.

Étant donné que $u(x) = u(x)$ et que $u(u(x)) = u^2(x) = 0$, la matrice de u dans la base $\mathscr{B}$ est :

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \mathrm{J}_2$$

6.
- Soit $\mathrm{A} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{C})$ nilpotente et u l'endomorphisme de $\mathbb{C}^2$ canoniquement associé à A. Comme A, u est nilpotent d'indice $p \in \mathbb{N}^*$.
  - Si $p = 1$, d'après la question **1**, $u = 0$ donc $\mathrm{A} = 0$ et on a bien $\mathrm{Tr}(\mathrm{A}) = \det(\mathrm{A}) = 0$.
  - Si $p \geqslant 2$, on a vu en question **5** qu'il existait une base $\mathscr{B}$ de $\mathbb{C}^2$ telle que $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u) = \mathrm{J}_2$. Comme A et J_2 représentent le même endomorphisme dans deux bases différentes, elles sont semblables et elles ont donc même trace et même déterminant. Comme $\mathrm{Tr}(\mathrm{J}_2) = \det(\mathrm{J}_2) = 0$, on a encore $\mathrm{Tr}(\mathrm{A}) = \det(\mathrm{A}) = 0$.

  Dans tous les cas, on a bien prouvé que $\mathrm{Tr}(\mathrm{A}) = \det(\mathrm{A}) = 0$.
- Réciproquement, soit $\mathrm{A} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{C})$ telle que $\mathrm{Tr}(\mathrm{A}) = \det(\mathrm{A}) = 0$. D'après le cours, le polynôme caractéristique χ_A de A est $\chi_\mathrm{A} = \mathrm{X}^2 - \mathrm{Tr}(\mathrm{A})\mathrm{X} + \det(\mathrm{A}) = \mathrm{X}^2$. D'après le théorème de Cayley-Hamilton, on a $\chi_\mathrm{A}(\mathrm{A}) = 0$ soit $\mathrm{A}^2 = 0$. Ainsi A est bien nilpotente.

On a prouvé le résultat souhaité par double-implication.

Partie II – Valeurs propres, polynôme caractéristique, polynômes annulateurs d'une matrice nilpotente

7. Soit $\mathrm{A} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice nilpotente d'indice p. Les valeurs propres de A sont les racines de χ_A. Comme tout polynôme complexe admet au moins une racine d'après le théorème de d'Alembert-Gauss, le spectre de A n'est pas vide. Soit donc $\lambda \in \mathbb{C}$ une valeur propre de A. Il existe ainsi $\mathrm{X} \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ tel que $\mathrm{X} \neq 0$ et $\mathrm{AX} = \lambda \mathrm{X}$. Pour $i \in \mathbb{N}$, on peut alors facilement prouver par récurrence que $\mathrm{A}^i\mathrm{X} = \lambda^i\mathrm{X}$.Pour $i = p$, cela donne $\mathrm{A}^p\mathrm{X} = 0\mathrm{X} = 0 = \lambda^p\mathrm{X}$ car $\mathrm{A}^p = 0$. Or $\mathrm{X} \neq 0$ donc $\lambda^p = 0$, ce qui prouve que $\lambda = 0$. On a bien prouvé que 0 est l'unique valeur propre de A.

8. Soit $\mathrm{A} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ telle que A est nilpotente et diagonalisable. On vient de voir que $\mathrm{sp}(\mathrm{A}) = \{0\}$. Comme A est diagonalisable, il existe $\mathrm{P} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ telle que $\mathrm{P}^{-1}\mathrm{AP} = 0$ puisque 0 est la seule valeur propre de A. Ainsi $\mathrm{A} = \mathrm{P}0\mathrm{P}^{-1} = 0$.

Réciproquement, la matrice nulle est à la fois nilpotente et diagonalisable.

9.
- Si $\mathrm{A} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ est nilpotente, alors $\mathrm{sp}(\mathrm{A}) = \{0\}$ d'après la question **7**. La seule valeur propre de A est donc 0 et elle est forcément de multiplicité n dans χ_A puisque $\deg(\chi_\mathrm{A}) = n$. Ainsi, $\chi_\mathrm{A} = \mathrm{X}^n$.
- Réciproquement, si $\chi_\mathrm{A} = \mathrm{X}^n$, d'après le théorème de Cayley-Hamilton, $\chi_\mathrm{A}(\mathrm{A}) = 0$, c'est-à-dire $\mathrm{A}^n = 0$ et A est bien nilpotente.

On a ainsi prouvé le résultat souhaité par double implication.

10. Soit $\mathrm{A} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ dont 0 est l'unique valeur propre. Comme à la question précédente, l'ordre de multiplicité de 0 dans χ_A ne peut être que n de sorte que $\chi_\mathrm{A} = \mathrm{X}^n$. Ainsi A est nilpotente d'après la question **9**.

11. Soit $\mathrm{A} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice triangulaire à diagonale nulle. Pour $\lambda \in \mathbb{C}$, la matrice $\lambda \mathrm{I}_n - \mathrm{A}$ est aussi triangulaire avec des λ sur la diagonale donc $\chi_\mathrm{A}(\lambda) = \lambda^n$ ce qui justifie que $\chi_\mathrm{A} = \mathrm{X}^n$. D'après la question **9**, la matrice A est donc nilpotente.

Soit $\mathrm{A} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ nilpotente. La question **9** assure que $\chi_\mathrm{A} = \mathrm{X}^n$ de sorte que A est trigonalisable puisque $\chi_\mathrm{A} = \mathrm{X}^n$ est scindé dans $\mathbb{C}[\mathrm{X}]$. La matrice A est donc semblable à une matrice triangulaire supérieure avec les valeurs propres sur la diagonale. Mais comme 0 est la seule valeur propre de A, cette dernière est semblable à une matrice triangulaire à diagonale nulle.

12. Soit $\mathrm{A} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ nilpotente d'indice p et $\mathrm{P} = \mathrm{X}^p\mathrm{Q} \in \mathbb{C}[\mathrm{X}]$ avec $\mathrm{Q} \in \mathbb{C}[\mathrm{X}]$. Alors, comme $\mathrm{P}(\mathrm{A}) = \mathrm{A}^p\mathrm{Q}(\mathrm{A})$ et que $\mathrm{A}^p = 0$, on a bien $\mathrm{P}(\mathrm{A}) = 0$.

13. Comme P est un polynôme annulateur de A, on sait d'après le cours que toute valeur propre de A est racine de P. Or 0 est la seule valeur propre de A d'après la question **7** donc 0 est bien racine de P.

14. Le polynôme $\mathrm{Q} \in \mathbb{C}[\mathrm{X}]$ se factorise sous la forme :

$$\mathrm{Q} = \prod_{k=1}^{q} (\mathrm{X} - \lambda_k)^{m_k}$$

où $\lambda_1, \dots, \lambda_q$ sont les différentes racines de Q et $m_1, \dots, m_q$ leurs multiplicités respectives. Comme $Q(0) \neq 0$, aucune de ces racines n'est nulle. On a alors :

$$Q(A) = \prod_{k=1}^{q} (A - \lambda_k I_n)^{m_k}$$

Or, pour k tel que $1 \leqslant k \leqslant q$, le complexe λ_k n'est pas valeur propre de A puisque $\mathrm{sp}(A) = \{0\}$ d'après la question **7**. Ainsi la matrice $A - \lambda_k I_n$ est inversible. En tant que produit de puissances de matrices inversibles la matrice Q(A) est inversible.

Comme $P(A) = A^m Q(A) = 0$, en multipliant à droite par $Q(A)^{-1}$, on obtient $A^m = 0$. Mais par définition de l'indice de nilpotence de A, on a $A \neq 0, A^2 \neq 0, \dots, A^{p-1} \neq 0$ et $A^p = 0$, ce qui justifie que $m \geqslant p$. Ainsi, on peut conclure que $P = X^m Q = X^p (X^{m-p} Q)$ est bien un multiple de X^p.