PROGRAMME DE COLLES

Semaine du 16 au 21 novembre

Espaces vectoriels normés

- **Généralités** : norme, normes usuelles sur $\mathbb{K}^n$, seconde inégalité triangulaire, distance associés à une norme, boule ouverte, boule fermée, sphère, parties convexes, parties, suites et fonctions bornées ;
- **Suites d'un espace vectoriel normé** : suite convergente, unicité de la limite, convergence et caractère borné, opérations sur les suites convergentes , suites extraites ;
- **Topologie d'un espace vectoriel normé** : point intérieur à une partie, intérieur d'une partie, partie ouverte, les boules ouvertes sont ouvertes, union et intersection d'ouverts, point adhérent à une partie, adhérence d'une partie, caractérisation séquentielle des points adhérents, partie fermée, caractérisation des fermés par l'adhérence, caractérisation séquentielle des fermés, les boules fermées sont fermées, union et intersection de fermés, frontière d'une partie ;
- **Limite et continuité d'applications entre espaces vectoriels normés** : limite, caractérisation séquentielle de la limite, unicité de la limite, opérations sur les limites, continuité, caractérisation séquentielle de la continuité, opérations sur la continuité, applications lipschitziennes, lipschitzienne implique continue, si $f : \mathrm{E} \to \mathbb{R}$ est continue, les ensembles $\{x \in \mathrm{E},\ f(x) = 0\}$ et $\{x \in \mathrm{E},\ f(x) \geqslant 0\}$ sont fermés et l'ensemble $\{x \in \mathrm{E},\ f(x) > 0\}$ est ouvert ;
- **En dimension finie** : équivalence des normes en dimension finie, c'est-à-dire qu'une suite converge vers ℓ pour une norme si et seulement si elle converge vers ℓ pour une autre norme, convergence des suites grâce aux suites coordonnées dans une base, limite et continuité des applications grâce aux applications coordonnées dans une base, applications continues sur une partie fermée bornée, en dimension finie, les applications linéaires et multilinéaires sont continues, les applications polynomiales sur $\mathbb{K}^n$ sont continues, continuité de det.

Preuves exigibles : *seconde inégalité triangulaire, les boules ouvertes sont ouvertes, caractérisation séquentielle des points adhérents, lipschitzien implique continu, si $f : \mathrm{E} \to \mathbb{R}$ est continue, l'ensemble $\{x \in \mathrm{E},\ f(x) = 0\}$ est fermé, continuité des applications linéaires en dimension finie.*