COMPLÉMENTS D'ALGÈBRE

Quelques corrigés du T.D. n°4

Exercice 7 ●●○ — *Sous-espaces stables*

Soient E un $\mathbb{K}$−espace vectoriel de dimension $n \geqslant 2$ et $u \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$ un endomorphisme.

1. On suppose dans cette question que, pour tout vecteur $x \in \mathrm{E}$, la famille $(x, u(x))$ est liée.

a. Justifier que pour tout $x \in \mathrm{E}$ il existe un scalaire λ_x tel que $u(x) = \lambda_x x$.

Puisque $(x, u(x))$ est liée, il existe $(a, b) \neq (0, 0)$ tel que $ax + bu(x) = 0$.

- Si $b \neq 0$ on a alors $u(x) = (-a/b)x$ comme souhaité.
- Si $b = 0$, alors $a \neq 0$ et on a $ax = 0$ soit $x = 0$. Dans ce cas, on peut trivialement écrire que $u(x) = u(0) = 0 = 0 \cdot x$ et on a encore le résultat souhaité.

b. En déduire que u est une homothétie de E (c'est-à-dire qu'il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $u = \lambda\,\mathrm{id}_{\mathrm{E}}$).
On fixera $x_0 \in \mathrm{E}$ non nul et on prouvera que $\alpha_x = \alpha_{x_0}$ pour tout $x \in \mathrm{E}$ en s'intéressant à α_{x+x_0}.

On fixe $x_0 \in \mathrm{E}$ non nul. On se donne alors $x \in \mathrm{E}$ non nul également. Deux cas se présentent :

- Si la famille (x, x_0) est liée, on peut écrire $ax + bx_0 = 0$ avec $(a, b) \neq (0, 0)$. On a forcément $a \neq 0$ car sinon $bx_0 = 0$ avec $b \neq 0$ et $x_0 \neq 0$. On peut donc écrire $x = (-b/a)x_0 = \mathrm{K}x_0$. Il vient alors $u(x) = u(\mathrm{K}x_0) = \mathrm{K}u(x_0) = \mathrm{K}\lambda_{x_0}x_0$. Mais on a aussi $u(x) = \lambda_x x = \lambda_x \mathrm{K} x_0$. Ainsi $\mathrm{K}\lambda_{x_0}x_0 = \lambda_x\mathrm{K}x_0$. Comme $x_0 \neq 0$ on a $\mathrm{K}\lambda_{x_0} = \lambda_x\mathrm{K}$. Si $\mathrm{K} = 0$ alors $b = 0$ ce qui donnerait $ax = 0$ avec $a \neq 0$ et $x = 0$, c'est exclu. Ainsi $\mathrm{K} \neq 0$ et il vient bien $\lambda_{x_0} = \lambda_x$.
- Si la famille (x, x_0) est libre, on a $u(x + x_0) = \lambda_{x+x_0}(x + x_0) = \lambda_{x+x_0}x + \lambda_{x+x_0}x_0$. Mais on a également $u(x + x_0) = u(x) + u(x_0) = \lambda_x x + \lambda_{x_0}x_0$. Ainsi $\lambda_{x+x_0}x + \lambda_{x+x_0}x_0 = \lambda_x x + \lambda_{x_0}x_0$ et par liberté de (x, x_0) il vient $\lambda_x = \lambda_{x+x_0} = \lambda_{x_0}$, ce qui donne ce que l'on souhaitait.

Dans tous les cas, on a bien montré $\lambda_x = \lambda_{x_0}$. Ainsi, on pose $\lambda = \lambda_{x_0}$ et on a prouvé que $u(x) = \lambda x$ pour tout $x \in \mathrm{E}$ non nul. Comme $u(0) = 0 = \lambda 0$, cette relation est aussi vérifiée en 0 et u est bien une homothétie.

2. On suppose que toute droite vectorielle de E est stable par u.
Montrer que u est une homothétie de E.

On fixe $x \in \mathrm{E}$ non nul. La droite $\mathrm{Vect}(x)$ est stable par u par hypothèse. Cela donne en particulier $u(x) \in \mathrm{Vect}(x)$ et donc $(x, u(x))$ liée. De plus, si $x = 0$, on a clairement $(x, u(x)) = (0, 0)$ qui est liée. Ainsi $(x, u(x))$ est liée pour tout $x \in \mathrm{E}$ et la question **1** permet de conclure.

3. On suppose que $n \geqslant 3$ et que tout plan vectoriel de E est stable par u.

a. Montrer que toute droite vectorielle de E peut s'écrire comme l'intersection de deux plans vectoriels de E.

Soit D une droite vectorielle de E que l'on écrit $\mathrm{D} = \mathrm{Vect}(x)$ avec $x \neq 0$. On complète la famille (x) en une base $(x, e_2, e_3, \ldots, e_n)$ de E. On pose alors $\mathrm{P}_1 = \mathrm{Vect}(x, e_2)$ et $\mathrm{P}_2 = \mathrm{Vect}(x, e_3)$, ce qui est possible car $n \geqslant 3$. On a que P_1 et P_2 sont bien des plans puisque (x, e_2) et (x, e_3) sont libres par construction. Prouvons que $\mathrm{P}_1 \cap \mathrm{P}_2 = \mathrm{D}$. L'inclusion $\mathrm{D} \subset \mathrm{P}_1 \cap \mathrm{P}_2$ est claire. Si $v = ax + be_2 = \alpha x + \beta e_3$ est dans $\mathrm{P}_1 \cap \mathrm{P}_2$ alors on obtient $(a - \alpha)x + be_2 - \beta e_3 = 0$ et comme (x, e_2, e_3) est libre il vient $a = \alpha$ et $b = \beta = 0$, *i.e.* $v = ax \in \mathrm{Vect}(x) = \mathrm{D}$. D'où $\mathrm{P}_1 \cap \mathrm{P}_2 = \mathrm{D}$.

b. En déduire que u est une homothétie de E.

Soit D une droite vectorielle de E. D'après la question précédente, on peut écrire $\mathrm{D} = \mathrm{P}_1 \cap \mathrm{P}_2$ où P_1 et P_2 sont deux plans. Vérifions alors que D est stable par u. Soit $x \in \mathrm{D}$. On a alors $x \in \mathrm{P}_1$ et $x \in \mathrm{P}_2$. Par stabilité de P_1 et P_2 par u, on a $u(x) \in \mathrm{P}_1$ et $u(x) \in \mathrm{P}_2$. Cela donne $u(x) \in \mathrm{P}_1 \cap \mathrm{P}_2 = \mathrm{D}$ et D est bien stable par u. On revient donc au contexte de la question **2** et u est ainsi à nouveau une homothétie de E.

Exercice 12 ••• Écriture d'un sous-espace vectoriel comme intersection d'hyperplans

Soient E un $\mathbb{K}-$ espace vectoriel de dimension finie $n \geqslant 2$ et F un sous-espace vectoriel de E de dimension $1 \leqslant p \leqslant n-1$. Montrer que F peut s'écrire comme l'intersection de $n-p$ hyperplans de E.

On se donne $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_p, e_{p+1}, \dots, e_n)$ une base de E adaptée à F, c'est-à-dire telle que $\mathscr{B}_\mathrm{F} = (e_1, \dots, e_p)$ soit une base de F. Dès lors, $x = \sum_{k=1}^n x_k e_k$ est dans F si et seulement si $x_k = 0$ pour tout $k \in [\![p+1\,, n]\!]$. Pour $i \in [\![1\,, n]\!]$, on pose :

$$\varphi_i \ : \ \begin{array}{ccc} \mathrm{E} & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ \sum_{k=1}^n x_k e_k & \longmapsto & x_i \end{array}$$

On vérifie facilement que φ_i est une forme linéaire et qu'elle est non nulle puisque $\varphi_i(e_i) = 1 \neq 0$. Par le cours, on a ainsi que les sous-espaces $\mathrm{Ker}(\varphi_i)$ sont des hyperplans de E. Comme $\mathrm{F} = \cap_{k=p+1}^n \mathrm{Ker}(\varphi_k)$ d'après ce qui précède, F est bien l'intersection de $n-(p+1)+1 = n-p$ hyperplans de E.