RÉDUCTION

Quelques corrigés du T.D. n°5

Exercice 16 ••• — *Matrices à coefficients entiers*

Soit $A \in \mathscr{M}_2(\mathbb{Z})$ une matrice carrée de taille 2 à coefficients entiers qui vérifie $A^n = I_2$ pour un certain entier $n \in \mathbb{N}^*$. Prouver que l'on a nécessairement $A^{12} = I_2$.

Sur $\mathscr{M}_2(\mathbb{C})$, la matrice A est diagonalisable puisqu'elle annule le polynôme scindé à racines simples $X^n - 1$. De plus, les valeurs propres de A sont racines de ce polynôme annulateur de sorte que le spectre de A est inclus dans l'ensemble des racines n−ème de l'unité. Dès lors :

- Si A possède deux valeurs propres réelles, ce ne peuvent être que -1 et 1. Les spectres possibles sont alors :
$$\{1\}, \quad \{-1\} \quad \text{et} \quad \{-1,1\} \tag{S_1}$$
- Si A possède au moins une valeur propre complexe non réelle λ, on sait, puisque A est une matrice à coefficients entiers et donc réels, que $\overline{\lambda}$ est également valeur propre de A. Comme $\overline{\lambda} \neq \lambda$ puisque $\lambda \notin \mathbb{R}$ et que A a au plus deux valeurs propres, les valeurs propres de A sont λ et $\overline{\lambda}$ et sont simples. Le polynôme caractéristique de A étant scindé sur $\mathbb{C}$, on sait que la trace de A vaut la somme de ses valeurs propres comptées avec leurs multiplicités, qui est ici un élément de $\mathbb{Z}$. On en déduit $\mathrm{Tr}(A) = \lambda + \overline{\lambda} \in \mathbb{Z}$ soit $\mathrm{Tr}(A) = 2\,\mathrm{Re}(\lambda) \in \mathbb{Z}$. Mais λ est une racine n−ème de l'unité par ce qui précède et n'est pas réelle donc $|\mathrm{Re}(\lambda)| < 1$. On en déduit que $\mathrm{Tr}(A) = 2\,\mathrm{Re}(\lambda) \in [\![-1,1]\!]$. Toujours avec le fait que le polynôme caractéristique de A est scindé sur $\mathbb{C}$, on sait que le produit des valeurs propres comptées avec leurs multiplicités vaut $\det(A)$. Cela donne $\det(A) = \lambda \cdot \overline{\lambda} = |\lambda|^2 = 1$ puisque λ est une racine n−ème de l'unité. Le polynôme caractéristique de A étant $X^2 - \mathrm{Tr}(A)X + \det(A)$, les seules possibilités sont :
$$X^2 + X + 1, \quad X^2 + 1 \quad \text{et} \quad X^2 - X + 1$$
ce qui donne les spectres possibles suivants :
$$\{j, \overline{j}\}, \quad \{i, -i\} \quad \text{et} \quad \{-j, -\overline{j}\} \tag{S_2}$$

Enfin, puisque A est diagonalisable dans $\mathscr{M}_2(\mathbb{C})$, on peut écrire $A = P\,\mathrm{diag}(a,b)P^{-1}$ avec $(a,b) \in \mathrm{sp}(A)^2$ et $P \in GL_2(\mathbb{C})$. On obtient alors $A^{12} = P\,\mathrm{diag}(a^{12}, b^{12})P^{-1}$. Mais si $z \in \mathrm{sp}(A)$, d'après (S_1) et (S_2), on a $z \in \{-1, 1, j, \overline{j}, i, -i, -j, -\overline{j}\}$ et on peut vérifier que dans tous les cas on a $z^{12} = 1$. Cela donne alors $A^{12} = PI_2P^{-1} = I_2$ comme souhaité.

Exercice 17 ••• — *Diagonalisation simultanée*

Soient E un $\mathbb{K}$−espace vectoriel de dimension finie et $u, v \in \mathscr{L}(E)$ deux endomorphismes diagonalisables de E qui commutent, c'est-à-dire que $u \circ v = v \circ u$.
Montrer qu'il existe une base de E dans laquelle les matrices de u et v sont toutes deux diagonales.

Comme u est diagonalisable, on peut écrire que $E = \oplus_{\lambda \in \mathrm{sp}(u)} E_\lambda(u)$ est la somme directe des sous-espaces propres de u. On fixe $\lambda \in \mathrm{sp}(u)$. Par le cours, le sous-espace propre $E_\lambda(u)$ est stable par v puisque $E_\lambda(u) = \mathrm{Ker}(u - \lambda\,\mathrm{id}_E)$ et que $u - \lambda\,\mathrm{id}_E$ et v commutent puisque u et v commutent. Ainsi on peut considérer $v_{E_\lambda(u)}$ l'endomorphisme induit par v sur $E_\lambda(u)$. Par le cours, puisque v est diagonalisable, $v_{E_\lambda(u)}$ l'est aussi. On peut donc obtenir une base $\mathscr{B}_\lambda$ de $E_\lambda(u)$ qui diagonalise $v_{E_\lambda(u)}$. Comme $E = \oplus_{\lambda \in \mathrm{sp}(u)} E_\lambda(u)$, la famille $\mathscr{B} = \cup_{\lambda \in \mathrm{sp}(u)} \mathscr{B}_\lambda$ est une base de E. Dès lors :

- $\mathscr{B}$ est une base qui diagonalise v.
En effet, pour chaque élément de $x \in \mathscr{B}$, il existe $\lambda \in \mathrm{sp}(u)$ tel que $x \in \mathscr{B}_\lambda$. Mais $\mathscr{B}_\lambda$ étant une base de $E_\lambda(u)$ qui diagonalise $v_{E_\lambda(u)}$, on a $v_{E_\lambda(u)}(x) = \mu x$ avec un certain scalaire μ, c'est-à-dire, par définition d'un endomorphisme induit, $v(x) = \mu x$. Ainsi x est un vecteur propre de v. Ceci étant valable pour tout $x \in \mathscr{B}$, la base $\mathscr{B}$ est formée de vecteurs propres de v et elle diagonalise bien v.

- $\mathscr{B}$ est une base qui diagonalise également u.
  En effet, pour chaque élément de $x \in \mathscr{B}$, il existe $\lambda \in \mathrm{sp}(u)$ tel que $x \in \mathscr{B}_\lambda$. En particulier, $x \in \mathrm{E}_\lambda(u)$ et x est un vecteur propre de u (associé à la valeur propre λ). Ceci étant valable pour tout $x \in \mathscr{B}$, la base $\mathscr{B}$ est formée de vecteurs propres de u et elle diagonalise bien u.

En conclusion, $\mathscr{B}$ est une base de E qui diagonalise à la fois u et v, ce que l'on voulait.