

T.D. N°6



EXERCICE 1 ••• Boule unité

On définit une application sur \mathbb{R}^2 en posant :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad N((x, y)) = \max(|x|, |y|, |x - y|)$$

1. Prouver que N est une norme sur \mathbb{R}^2 .
2. Dessiner la boule unité fermée pour la norme N dans le plan \mathbb{R}^2 .

EXERCICE 2 ••• Comparaison des normes usuelles

On considère les normes $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ et $\|\cdot\|_\infty$ sur \mathbb{R}^n . On fixe $x \in \mathbb{R}^n$. Montrer que :

$$\|x\|_\infty \leq \|x\|_1, \quad \|x\|_\infty \leq \|x\|_2, \quad \|x\|_2 \leq \|x\|_1, \quad \|x\|_2 \leq \sqrt{n}\|x\|_\infty, \quad \|x\|_1 \leq \sqrt{n}\|x\|_2 \quad \text{et} \quad \|x\|_1 \leq n\|x\|_\infty$$

EXERCICE 3 ••• Études de normes sur $\mathbb{R}_n[X]$ et \mathbb{R}^n

1. Pour $n \in \mathbb{N}$ et a_0, \dots, a_n des réels deux à deux distincts, on définit une application N sur $\mathbb{R}_n[X]$ en posant :

$$\forall P \in \mathbb{R}_n[X], \quad N(P) = \max_{k \in \{0, \dots, n\}} |P(a_k)|$$

Prouver que N définit une norme sur $\mathbb{R}_n[X]$.

2. Pour $n \geq 1$ et a_1, \dots, a_n des réels, on définit une application N sur \mathbb{R}^n en posant :

$$\forall (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n, \quad N(x_1, \dots, x_n) = a_1|x_1| + \dots + a_n|x_n|$$

Donner une condition nécessaire et suffisante sur les réels a_1, \dots, a_n pour que N soit une norme sur \mathbb{R}^n .

EXERCICE 4 ••• Étude d'une norme matricielle

Pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et tout entier $p \in \mathbb{N}$ on pose :

$$\|A\| = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |a_{i,j}| \quad \text{et} \quad E_p(A) = \sum_{k=0}^p \frac{A^k}{k!}$$

1. Vérifier que $\|\cdot\|$ définit une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
2. Prouver que :

$$\forall (A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2, \quad \|AB\| \leq \|A\| \|B\|$$

3. Justifier la convergence de la série numérique $\sum_{k \geq 0} \frac{\|A^k\|}{k!}$.
4. En déduire que la suite $(E_p(A))_{p \geq 0}$ est convergente dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

EXERCICE 5 ••○ *Parties ouvertes et fermées*

Pour chacune des parties de \mathbb{R}^2 suivantes, étudier si elles sont ouvertes ou fermées :

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, y > x\}, \quad B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, y \leq x \text{ et } x \leq 1\} \quad \text{et} \quad C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x > 0 \text{ et } y \leq 0\}$$

EXERCICE 6 ••○ *Étude d'une autre norme matricielle*

Pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et tout vecteur $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, on pose :

$$\|A\| = \max_{i \in [1, n]} \left(\sum_{j=1}^n |a_{i,j}| \right) \quad \text{et} \quad N(X) = \max_{i \in [1, n]} |x_i|$$

1. Vérifier que $\|\cdot\|$ définit une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
2. Prouver que :

$$\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \quad \forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), \quad N(AX) \leq \|A\|N(X)$$

3. En déduire que :

$$\|A\| = \sup_{\substack{X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \\ N(X)=1}} N(AX)$$

EXERCICE 7 ••○ *Suites matricielles*

1. On fixe $a \in \mathbb{R}$. Pour tout $n \geq 1$, on pose :

$$A_n = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{a}{n} \\ \frac{a}{n} & 1 \end{pmatrix}$$

- A. Pour $n \geq 1$, prouver que A_n est diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ et la diagonaliser.
 - B. En déduire, si elle existe, la limite de la suite matricielle $(A_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.
2. Pour $n \geq 1$, on se donne $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice diagonalisable telle que $\text{sp}(A) \subset]-1, 1[$. Prouver que la suite $(A^p)_{p \in \mathbb{N}}$ converge vers la matrice nulle.

EXERCICE 8 ••○ *Espace normé fonctionnel*

Dans la suite, on désigne par E l'ensemble $\mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$ des fonctions définies et continues sur $[0, 1]$ et à valeurs réelles. On introduit les deux normes suivantes sur E :

$$\forall f \in E, \quad \|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)| dt \quad \text{et} \quad \|f\|_\infty = \sup_{t \in [0,1]} |f(t)|$$

1. Pour tout $n \geq 1$, on pose :

$$\forall t \in [0, 1], \quad f_n(t) = \begin{cases} -nt + 1 & \text{si } t \in \left[0, \frac{1}{n}\right] \\ 0 & \text{si } t \in \left[\frac{1}{n}, 1\right] \end{cases}$$

Étudier la convergence de la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ dans E pour les normes $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_\infty$. Commenter le résultat.

2. On note η la fonction définie sur $[0, 1]$ constante égale à 1 et on pose $F = \{f \in E, f(0) = 0\}$. Prouver que η est adhérente à F pour la norme $\|\cdot\|_1$. Que se passe-t-il si l'on considère $\|\cdot\|_\infty$?

3. Démontrer que les deux applications suivantes sont continues sur E muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$:

$$\begin{array}{ccc} \phi : E & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ f & \longmapsto & f(0) - 1 \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{ccc} \psi : E & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ f & \longmapsto & \int_0^1 f(t) dt \end{array}$$

En déduire que l'ensemble :

$$A = \left\{ f \in E, f(0) = 1 \text{ et } \int_0^1 f(t) dt = 0 \right\}$$

est une partie fermée dans E muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$.

EXERCICE 9 ●●● *Un peu de topologie*

Soit E un espace vectoriel normé.

1. Si A et B sont deux parties de E telles que $A \subset B$, prouver que $\overset{\circ}{A} \subset \overset{\circ}{B}$ et que $\overline{A} \subset \overline{B}$.
2. Soit A une partie convexe de E. Montrer que \overline{A} est convexe.
3. On suppose E de dimension finie et on se donne V un sous-espace vectoriel de E.
 - a. Montrer que V est une partie fermée.
 - b. On suppose que $0 \in \overset{\circ}{V}$. Prouver que $V = E$.
 - c. Plus généralement, si on suppose $\overset{\circ}{V} \neq \emptyset$, prouver que $V = E$.

EXERCICE 10 ●●● *Distance à une partie non vide*

Soit A une partie non vide d'un espace vectoriel normé E. On notera d la distance associée à la norme de E. Pour $x \in E$, on appelle *distance de x à A* la quantité :

$$d(x, A) = \inf_{a \in A} d(x, a)$$

1. Montrer que l'application $x \in E \mapsto d(x, A) \in \mathbb{R}$ est 1-lipschitzienne et donc continue.
On pourra commencer par montrer que $d(x, A) - d(y, A) \leq d(x, y)$.
2. Soit $x \in E$. Prouver que $d(x, A) = 0$ si et seulement si $x \in \overline{A}$.
3. Pour $R > 0$ on pose $A(R) = \{x \in E, d(x, A) \leq R\}$. Montrer que si A est convexe alors $A(R)$ est convexe et fermé.