

QUELQUES CORRIGÉS DU T.D. N°6



EXERCICE 9 ••• Un peu de topologie

Soit E un espace vectoriel normé.

1. Si A et B sont deux parties de E telles que $A \subset B$, prouver que $\overset{\circ}{A} \subset \overset{\circ}{B}$ et que $\overline{A} \subset \overline{B}$.

On prouve la première inclusion. Soit $x \in \overset{\circ}{A}$. Par définition, il existe $r > 0$ tel que $B(x, r) \subset A$. Mais $A \subset B$ donne $B(x, r) \subset B$, ce qui prouve que $x \in \overset{\circ}{B}$.

Pour la seconde inclusion, on utilise la caractérisation séquentielle des points adhérents. Si $x \in \overline{A}$, il existe une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de A qui converge vers x . Mais $A \subset B$ donne que cette suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est aussi une suite de B qui converge vers x . Ainsi $x \in \overline{B}$.

2. Soit A une partie convexe de E . Montrer que \overline{A} est convexe.

On utilise la caractérisation séquentielle des points adhérents. On se donne x et y deux points de \overline{A} et $\lambda \in [0, 1]$ et on va prouver que $\lambda x + (1 - \lambda)y$ est encore dans \overline{A} . Comme x et y sont deux points de \overline{A} , il existe des suites $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de A qui convergent respectivement vers x et y . Par convexité de A , la suite $(\lambda x_n + (1 - \lambda)y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de A qui converge vers $\lambda x + (1 - \lambda)y$ de sorte que l'on obtient bien $\lambda x + (1 - \lambda)y \in \overline{A}$.

3. On suppose E de dimension finie et on se donne V un sous-espace vectoriel de E .

- a. Montrer que V est une partie fermée.

Puisque E est de dimension finie, on se donne $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_p, e_{p+1}, \dots, e_q)$ une base de E adaptée à V , c'est-à-dire que $\mathcal{B}_V = (e_1, \dots, e_p)$ est une base de V . On va montrer que V est fermée par caractérisation séquentielle. On se donne une suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de V qui converge vers $v \in E$ et on va montrer que $v \in V$. On introduit les suites coordonnées $(v_n^{(k)})_{n \in \mathbb{N}}$ pour $k \in \llbracket 1, q \rrbracket$ de la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dans la base \mathcal{B} en écrivant :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_n = \sum_{k=1}^q v_n^{(k)} e_k$$

Puisque la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers v , on sait que les suites coordonnées convergent toutes vers les coordonnées $(v^{(k)})_{1 \leq k \leq q}$ de v dans la base \mathcal{B} , c'est-à-dire que :

$$v = \sum_{k=1}^q v^{(k)} e_k$$

Mais, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $v_n \in V$, ce qui donne $v_n^{(k)} = 0$ pour tout $k > p$. Par passage à la limite et unicité de la limite, cela donne $v^{(k)} = 0$ pour $k > p$. Ainsi v se décompose uniquement sur les vecteurs e_1, \dots, e_p de V et on conclut bien que $v \in V$.

- b. On suppose que $0 \in \overset{\circ}{V}$. Prouver que $V = E$.

L'inclusion $V \subset E$ est triviale. Prouvons que $E \subset V$. On se donne donc $x \in E$. Par hypothèse, $0 \in \overset{\circ}{V}$ donc il existe $r > 0$ tel que $B(0, r) \subset V$. Dès lors :

- Si $x = 0$, on a trivialement $x \in V$ puisque V est un espace vectoriel.
- Si $x \neq 0$, le vecteur $y = rx / (2\|x\|)$ est dans $B(0, r)$ puisque $\|y\| = r/2 < r$. Avec l'hypothèse on a que $y \in V$. Mais V est un espace vectoriel donc on obtient $x = 2\|x\|/r \cdot y \in V$.

Dans tous les cas on a bien $x \in V$, ce qui prouve $E \subset V$ et donc $V = E$.

- c. Plus généralement, si on suppose $\overset{\circ}{V} \neq \emptyset$, prouver que $V = E$.

Si $\overset{\circ}{V} \neq \emptyset$, on peut se donner $x \in \overset{\circ}{V}$ et il existe $r > 0$ tel que $B(x, r) \subset V$. L'ensemble V étant un sous-espace vectoriel et puisque $x \in \overset{\circ}{V} \subset V$, l'ensemble $\{y - x, y \in B(x, r)\} = B(0, r)$ est encore inclus dans V . Cela prouve que $0 \in \overset{\circ}{V}$ et la question précédente permet de conclure.

EXERCICE 10 ●●● Distance à une partie non vide

Soit A une partie non vide d'un espace vectoriel normé E . On notera d la distance associée à la norme de E . Pour $x \in E$, on appelle *distance de x à A* la quantité :

$$d(x, A) = \inf_{a \in A} d(x, a)$$

1. Montrer que l'application $x \in E \rightarrow d(x, A) \in \mathbb{R}$ est 1-lipschitzienne et donc continue.

On pourra commencer par montrer que $d(x, A) - d(y, A) \leq d(x, y)$.

On fixe $(x, y) \in A^2$. On se donne $a \in A$. On a alors par inégalité triangulaire $d(x, a) \leq d(x, y) + d(y, a)$. La borne inférieure étant un minorant, on obtient $d(x, A) \leq d(x, y) + d(y, A)$. Cela donne que $d(x, A) - d(y, A)$ est un minorant de tous les $d(y, a)$ pour $a \in A$, ce qui implique, par définition de la borne inférieure, que $d(x, A) - d(y, A) \leq d(y, A)$. Finalement on a bien prouvé $d(x, A) - d(y, A) \leq d(x, y)$. Par symétrie des rôles de x et y et de la distance, on a aussi $d(y, A) - d(x, A) \leq d(x, y)$. En combinant ces deux informations, on trouve que $|d(x, A) - d(y, A)| \leq d(x, y)$. La fonction définie est ainsi 1-lipschitzienne et donc continue.

2. Soit $x \in E$. Prouver que $d(x, A) = 0$ si et seulement si $x \in \bar{A}$.

On procède par double-implication.

- Supposons $d(x, A) = 0$. Par définition de la borne inférieure, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $a_n \in A$ tel que $0 \leq d(x, a_n) \leq 1/n$. On vient ainsi de créer une suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de A qui converge vers x puisque $d(x, a_n) \rightarrow 0$ par encadrement. Cela donne $x \in \bar{A}$.
- Réciproquement, on suppose $x \in \bar{A}$. Par caractérisation séquentielle, il existe une suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de A qui converge vers x . On a alors $0 \leq d(x, A) \leq d(x, a_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ puisque la borne inférieure est un minorant et que la distance est positive. Par passage à la limite, étant donné que $d(x, a_n) \rightarrow 0$ puisque $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers x , il vient bien $d(x, A) = 0$.

3. Pour $R > 0$ on pose $A(R) = \{x \in E, d(x, A) \leq R\}$. Montrer que si A est convexe alors $A(R)$ est convexe et fermé.

Prouvons la convexité. On se donne x et y dans $A(R)$ et $\lambda \in [0, 1]$. Prouvons que $\lambda x + (1 - \lambda)y \in A(R)$. On se donne $(a_1, a_2) \in A^2$. Par convexité de A , $\lambda a_1 + (1 - \lambda)a_2$ est dans A . Ainsi, par inégalité triangulaire, homogénéité de la norme et positivité de λ et $1 - \lambda$:

$$\begin{aligned} d(\lambda x + (1 - \lambda)y, A) &\leq d(\lambda x + (1 - \lambda)y, \lambda a_1 + (1 - \lambda)a_2) = \|\lambda x + (1 - \lambda)y - (\lambda a_1 + (1 - \lambda)a_2)\| \\ &= \|\lambda(x - a_1) + (1 - \lambda)(y - a_2)\| \\ &\leq \lambda\|x - a_1\| + (1 - \lambda)\|y - a_2\| = \lambda d(x, a_1) + (1 - \lambda)d(y, a_2) \end{aligned}$$

Ainsi, si on fixe a_2 , le terme $d(\lambda x + (1 - \lambda)y, A) - (1 - \lambda)d(y, a_2)$ est un minorant des $\lambda d(x, a_1)$ pour $a_1 \in A$. Par définition d'une borne inférieure, cela donne $d(\lambda x + (1 - \lambda)y, A) - (1 - \lambda)d(y, a_2) \leq \lambda d(x, A)$. En passant de la même façon à la borne inférieure sur les $a_2 \in A$, on obtient :

$$d(\lambda x + (1 - \lambda)y, A) \leq \lambda d(x, A) + (1 - \lambda)d(y, A) \leq \lambda R + (1 - \lambda)R = R$$

où l'on a utilisé le fait que x et y sont dans $A(R)$. Cela permet de conclure.

Prouvons que $A(R)$ est fermé par caractérisation séquentielle. On se donne $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de $A(R)$ qui converge vers $x \in E$ et on va montrer que $x \in A(R)$. La suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ étant à valeurs dans $A(R)$, on a $d(x_n, A) \leq R$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Par passage à la limite dans cette inégalité, en utilisant la caractérisation séquentielle de la continuité de l'application étudiée à la question 1 qui donne $d(x_n, A) \rightarrow d(x, A)$ lorsque n tend vers $+\infty$, on obtient $d(x, A) \leq R$, c'est-à-dire $x \in A(R)$.