

T.D. N°8



EXERCICE 1 ••• Étude de séries entières

Déterminer le rayon de convergence des séries entières suivantes :

- | | | |
|--|---|---|
| 1. $\sum_{n \geq 0} \frac{n^2 + 1}{n^3 + 2} z^n$ | 4. $\sum_{n \geq 1} \frac{\ln(n^2 + 1)}{\ln(n^3 + 1)} z^n$ | 7. $\sum_{n \geq 0} \tan(\pi \sqrt{n^2 + 1}) z^n$ |
| 2. $\sum_{n \geq 0} (\sqrt{n+2} - \sqrt{n}) z^n$ | 5. $\sum_{n \geq 0} (\sqrt{n^2 + n} - \sqrt[3]{n^3 + n^2}) z^n$ | 8. $\sum_{n \geq 0} \ln(n!) z^n$ |
| 3. $\sum_{n \geq 0} \frac{2^n + n^2}{3^n - n^2} z^n$ | 6. $\sum_{n \geq 1} (\sqrt{n})^{-n} z^n$ | 9. $\sum_{n \geq 1} \frac{\operatorname{ch} n}{\operatorname{sh}^2 n} z^{2n}$ |

EXERCICE 2 ••• Étude de séries entières et calculs de sommes

Déterminer le rayon de convergence des séries entières suivantes et en calculer la somme :

- | | | |
|--|--|--|
| 1. $\sum_{n \geq 1} \frac{(n+1)^2}{n} x^n$ | 4. $\sum_{n \geq 1} \frac{x^n}{n(n+2)}$ | 7. $\sum_{n \geq 0} \frac{n+1}{(n+2)n!} z^n$ |
| 2. $\sum_{n \geq 0} \frac{n+1}{n!} z^n$ | 5. $\sum_{n \geq 2} \frac{n + (-1)^{n+1}}{n + (-1)^n} x^n$ | 8. $\sum_{n \geq 0} \cos(n) x^n$ |
| 3. $\sum_{n \geq 1} n^{(-1)^n} x^n$ | 6. $\sum_{n \geq 0} \frac{x^{4n+1}}{(4n+1)!}$ | 9. $\sum_{n \geq 0} \frac{x^n}{(2n)!}$ |

EXERCICE 3 ••• Développements en série entière

Dans chaque cas, développer en série entière la fonction f en 0 et donner le rayon de convergence associé :

- | | | |
|--------------------------------------|--------------------------------------|--|
| 1. $f(x) = \frac{1}{x^4 - 3x^2 + 2}$ | 3. $f(x) = \frac{\sin(4x)}{\sin(x)}$ | 5. $f(x) = \frac{1}{x^2 - x + 2}$ |
| 2. $f(x) = (1-x)\ln(1-x)$ | 4. $f(x) = \ln(1+x+x^2)$ | 6. $f(x) = \operatorname{Arctan}(1+x)$ |

EXERCICE 4 ••• Une identité binomiale

Soit $p \in \mathbb{N}$. Établir que :

$$\forall x \in]-1, 1[, \quad \frac{1}{(1-x)^{p+1}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{n+p}{n} x^n$$

EXERCICE 5 ••• Classe \mathcal{C}^∞ d'une fonction

On définit une fonction f sur \mathbb{R} en posant :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Prouver que f est de classe \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R} .

EXERCICE 6 ●●○ Développement en série entière d'une fonction

On définit une fonction f sur $] -1, 1 [$ en posant :

$$\forall x \in] -1, 1 [, \quad f(x) = \frac{\text{Arcsin } x}{\sqrt{1-x^2}}$$

1. Justifier que f possède un développement en série entière.
2. Démontrer que f vérifie une équation différentielle linéaire d'ordre 1.
En déduire son développement en série entière; on donnera le rayon de convergence associé.
3. En déduire la valeur de :

$$S = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{2n}{n}^{-1}$$

EXERCICE 7 ●●○ Développement en série entière d'une fonction

On définit une fonction f sur \mathbb{R} en posant :

$$\forall x \in] -1, 1 [, \quad f(x) = \int_0^\pi \text{ch}(x \cos t) dt$$

1. On introduit, pour $p \in \mathbb{N}$, les intégrales :

$$J_{2p} = \int_0^\pi \cos^{2p}(t) dt \quad \text{et} \quad I_{2p} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2p}(t) dt$$

- a. Prouver que $J_{2p} = 2I_{2p}$ pour $p \in \mathbb{N}$.
- b. Démontrer que :

$$\forall p \in \mathbb{N}, \quad I_{2p+2} = \frac{2p+1}{2p+2} I_{2p}$$

- c. En déduire l'expression de J_{2p} en fonction de $p \in \mathbb{N}$.
2. Prouver que f est développable en série entière et donner le rayon de convergence associé.

EXERCICE 8 ●●○ Calcul d'une somme

On pose, pour tout réel x où la série converge :

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \binom{2n}{n} \frac{x^n}{2n-1}$$

1. Donner le rayon de convergence de la série entière associée à f .
2. Démontrer que f est solution de l'équation différentielle :

$$(1+4x)y' - 2y = 0$$

3. En déduire f .

EXERCICE 9 ●●○ Calcul d'une somme

On pose, pour tout réel x où la série converge :

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^n}{(n+1)(2n+1)}$$

1. Prouver que la série entière associée à la somme f est de rayon de convergence 1.

- Exprimer $f(x)$ pour $x \in]-1, 1[$.
- Justifier que f est bien définie est continue sur $[-1, 1]$.
- En déduire la valeur de la somme :

$$S = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)(2n+1)}$$

EXERCICE 10 ●●○ Étude d'une suite récurrente

On souhaite déterminer l'expression de la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$a_0 = 1 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad a_{n+1} = \frac{a_n}{n+1} + \frac{(-1)^n}{(n+1)!}$$

- Montrer que le rayon de convergence R de la série entière $\sum a_n x^n$ vérifie $R \geq 1$. Dans la suite, on note S la somme de cette série entière.
- Prouver que :

$$\forall x \in]-R, R[, \quad S'(x) = S(x) + e^{-x}$$

- En déduire l'expression de a_n en fonction de $n \in \mathbb{N}$.

EXERCICE 11 ●●○ Nombres de Catalan

On souhaite déterminer l'expression de la suite $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$c_0 = 1 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad c_{n+1} = \sum_{k=0}^n c_k c_{n-k}$$

- On suppose que la série entière $\sum c_n x^n$ est de rayon de convergence $R > 0$ et l'on note f sa somme. Montrer qu'au voisinage de 0, la fonction f vérifie la relation $xf(x)^2 = f(x) - 1$.
- Toujours sous l'hypothèse de la question précédente, prouver qu'au voisinage de 0 la fonction f est égale à la fonction g définie par :

$$g(x) = \frac{1}{2x} (1 - \sqrt{1-4x})$$

- Montrer que la fonction g est développable en série entière en 0 et donner son développement et le rayon de convergence associé.
- En déduire que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad c_n = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}$$

EXERCICE 12 ●●● Équivalents de sommes de séries entières

- Déterminer les rayons de convergence des séries entières suivantes :

$$\sum_{n \geq 2} \ln(n)x^n, \quad \sum_{n \geq 2} \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right)x^n \quad \text{et} \quad \sum_{n \geq 2} \frac{x^n}{n}$$

Dans la suite, on notera respectivement f , g et h les sommes de ces séries entières.

- Montrer que g est définie et continue sur $[-1, 1[$.
- Pour $x \in]-1, 1[$, déterminer une relation entre $(1-x)f(x)$ et $g(x)$.
- Prouver que $g+h$ est continue sur $[0, 1]$ et en déduire que $g(x) \sim \ln(1-x)$ au voisinage de 1^- . En déduire un équivalent de $f(x)$ au voisinage de 1^- .