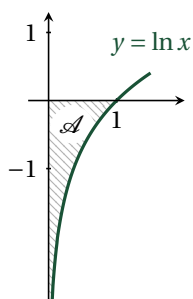




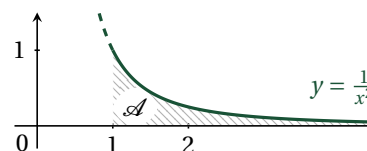
## PLAN DU COURS

<b>I. INTÉGRALE SUR UN SEGMENT D'UNE FONCTION CONTINUE PAR MORCEAUX</b>	<b>2</b>
I. 1. Fonctions continues par morceaux . . . . .	2
I. 2. Intégrale sur un segment . . . . .	2
I. 3. Propriétés de l'intégrale . . . . .	3
<b>II. INTÉGRALES GÉNÉRALISÉES</b>	<b>4</b>
II. 1. Intégrale généralisée sur un intervalle semi-ouvert . . . . .	4
II. 2. Intégrales de référence . . . . .	5
II. 3. Intégrale généralisée sur un intervalle ouvert . . . . .	5
II. 4. Propriétés des intégrales généralisées . . . . .	6
II. 5. Calcul d'intégrales généralisées . . . . .	7
II. 6. Convergence absolue des intégrales généralisées, intégrabilité	9
II. 7. Espaces fonctionnels et intégrabilité . . . . .	10
<b>III. SUITES ET SÉRIES DE FONCTIONS INTÉGRABLES</b>	<b>11</b>
III. 1. Théorème de convergence dominée . . . . .	11
III. 2. Séries de fonctions intégrables . . . . .	11
<b>IV. INTÉGRALES À PARAMÈTRE</b>	<b>12</b>
IV. 1. Continuité d'une intégrale à paramètre . . . . .	12
IV. 2. Dérivation d'une intégrale à paramètre . . . . .	13
IV. 3. Classe $\mathcal{C}^k$ d'une intégrale à paramètre . . . . .	14

Dans ce chapitre, on pose pour acquis la notion d'intégrale d'une fonction continue sur un segment. Nous allons étendre cette notion sur deux aspects :



- Les fonctions intégrées pourront être moins régulières, à savoir continues par morceaux et non plus seulement continues.
- Le domaine d'intégration pourra être un intervalle quelconque de  $\mathbb{R}$  et non plus seulement un segment.



Par exemple, on pourra s'intéresser aux intégrales suivantes :

$$\int_0^1 \ln t \, dt \quad \text{et} \quad \int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^2}$$

La première intégrale pose un soucis au point 0 puisque la fonction  $\ln$  n'y est pas définie, on intègre sur un intervalle semi-ouvert  $]0, 1]$ . Quant à la seconde intégrale, elle pose un soucis puisque l'on intègre sur un intervalle semi-ouvert non borné  $[1, +\infty[$ . Géométriquement, étudier l'existence de ces intégrales revient à se demander si « l'aire sous la courbe »  $\mathcal{A}$  de la fonction  $\ln$  sur  $]0, 1]$  ou de la fonction  $x \mapsto 1/x^2$  sur  $[1, +\infty[$  est finie.

Dans la suite,  $\mathbb{K}$  désigne  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ , les intervalles considérés seront toujours d'intérieur non vide et, sauf mention du contraire, les fonctions sont à valeurs dans  $\mathbb{K}$ .

# I. INTÉGRALE SUR UN SEGMENT D'UNE FONCTION CONTINUE PAR MORCEAUX

## I. 1. FONCTIONS CONTINUES PAR MORCEAUX

### DÉFINITION 1 – Subdivision

On appelle *subdivision* du segment  $[a, b]$  avec  $a < b$  toute suite finie  $\sigma = (a_1, \dots, a_n)$  de réels tels que :

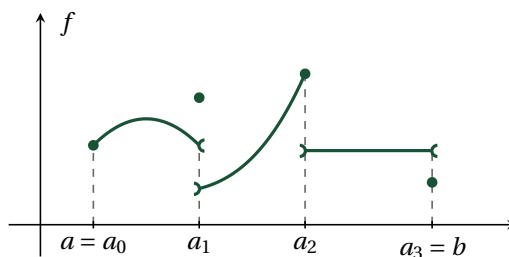
$$a = a_0 < a_1 < \dots < a_n = b$$

### DÉFINITION 2 – Continuité par morceaux

- Une fonction  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{K}$  est dite *continue par morceaux* s'il existe une subdivision  $\sigma = (a_1, \dots, a_n)$  du segment  $[a, b]$  telle que, pour tout  $i \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$ , la restriction de  $f$  à  $]a_i, a_{i+1}[$  possède un prolongement continu sur le segment  $[a_i, a_{i+1}]$ . Une telle subdivision est dite *adaptée* à  $f$ .
- Une fonction  $f : I \rightarrow \mathbb{K}$  définie sur un intervalle  $I$  est dite *continue par morceaux* si elle est continue par morceaux sur tout segment de  $I$ .

**NOTATION** On note  $\mathcal{CM}(I, \mathbb{K})$  l'ensemble des fonctions continues par morceaux sur l'intervalle  $I$  à valeurs dans  $\mathbb{K}$ .

**REMARQUE** Pour justifier qu'une fonction  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{K}$  est continue par morceaux, on détermine une subdivision  $\sigma = (a_1, \dots, a_n)$  du segment  $[a, b]$  pour laquelle, pour tout  $i \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$ , la fonction  $f|_{]a_i, a_{i+1}[}$  est continue et admet des limites finies en  $a_i$  et  $a_{i+1}$ .



### EXEMPLES 1

- Prouver que toute fonction continue  $f$  sur un intervalle  $y$  est continue par morceaux.
- Montrer que la fonction  $f$  qui est nulle sur  $\mathbb{R}^*$  et égale à 1 en 0 est continue par morceaux sur  $\mathbb{R}$ .
- Étudier la continuité par morceaux de la fonction partie entière  $f : x \mapsto [x]$  sur  $\mathbb{R}$ .

### PROPOSITION 1 – Caractère borné des fonctions continues par morceaux sur un segment

Toute fonction continue par morceaux sur un segment est bornée.

### PROPOSITION 2 – Opérations sur les fonctions continues par morceaux

- **Combinaison linéaire :** L'ensemble  $\mathcal{CM}(I, \mathbb{K})$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathcal{F}(I, \mathbb{K})$ . Autrement dit, si  $f, g \in \mathcal{CM}(I, \mathbb{K})$  et  $\lambda \in \mathbb{K}$  alors  $\lambda f + g \in \mathcal{CM}(I, \mathbb{K})$ .
- **Produit :** Si  $f, g \in \mathcal{CM}(I, \mathbb{K})$  alors  $fg \in \mathcal{CM}(I, \mathbb{K})$ .

## I. 2. INTÉGRALE SUR UN SEGMENT

On est maintenant en mesure de définir l'intégrale sur un segment d'une fonction continue par morceaux grâce au résultat qui suit :

**PROPOSITION 3** – Intégrale d'une fonction continue par morceaux sur un segment

Soient  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{K}$  une fonction continue par morceaux sur  $[a, b]$  avec  $a < b$  et  $\sigma = (a_1, \dots, a_n)$  une subdivision adaptée à  $f$ . Pour tout  $i \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$ , on note  $f_i$  le prolongement continu de  $f|_{[a_i, a_{i+1}]}$  sur  $[a_i, a_{i+1}]$ .

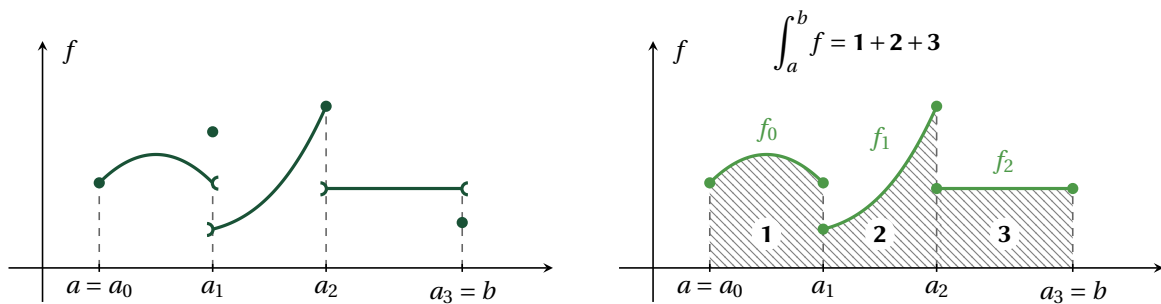
Alors la somme :

$$S_\sigma(f) = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{a_i}^{a_{i+1}} f_i$$

ne dépend pas du choix de la subdivision  $\sigma$  adaptée à  $f$ .

Cette somme est appelée *intégrale* de  $f$  sur le segment  $[a, b]$ . On la note  $\int_a^b f$ ,  $\int_{[a,b]} f$  ou encore  $\int_a^b f(t) dt$ .

**CONVENTION** Dans le cas où  $a > b$ , on pose  $\int_a^b f = -\int_b^a f = -\int_{[a,b]} f$ . On convient aussi que  $\int_a^a f = 0$ .



**EXEMPLE 2**

On introduit de nouveau la fonction  $f$  qui est nulle sur  $\mathbb{R}^*$  et égale à 1 en 0. Prouver que son intégrale sur le segment  $[-a, a]$  pour  $a > 0$  est nulle.

**I. 3. PROPRIÉTÉS DE L'INTÉGRALE**

**PROPOSITION 4** – Propriétés de l'intégrale

Soient  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{K}$  et  $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{K}$  deux fonctions continues par morceaux sur  $[a, b]$ .

- **Linéarité :** Pour tout  $\lambda \in \mathbb{R}$ ,  $\int_a^b (\lambda f + g) = \lambda \int_a^b f + \int_a^b g$ .
- **Inégalité triangulaire :** Si  $a \leq b$ ,  $\left| \int_a^b f \right| \leq \int_a^b |f|$ .
- **Relation de Chasles :** Si  $c \in [a, b]$ ,  $\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$ .

**PROPOSITION 5** – Positivité, croissance et nullité

Soient  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  et  $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  deux fonctions continues par morceaux sur  $[a, b]$ .

- **Positivité :** Si  $f \geq 0$  sur  $[a, b]$  et si  $a \leq b$  alors  $\int_a^b f \geq 0$ .
- **Croissance :** Si  $f \leq g$  sur  $[a, b]$  et si  $a \leq b$  alors  $\int_a^b f \leq \int_a^b g$ .

- **Nullité :** Si  $f \geq 0$  sur  $[a, b]$  et si  $\int_a^b f = 0$  alors  $f$  est nulle sur  $[a, b]$  sauf peut-être en un nombre fini de points.

**PROPOSITION 6** – *Intégrale d'une fonction continue par morceaux à valeurs complexes*

Soit  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  une fonction.

Alors  $f$  est continue par morceaux sur  $[a, b]$  si et seulement si les fonctions à valeurs réelles  $\operatorname{Re}(f)$  et  $\operatorname{Im}(f)$  sont continues par morceaux sur  $[a, b]$ . Dans ce cas, on a :

$$\int_a^b f = \int_a^b \operatorname{Re}(f) + i \int_a^b \operatorname{Im}(f)$$

## II. INTÉGRALES GÉNÉRALISÉES

### II. 1. INTÉGRALE GÉNÉRALISÉE SUR UN INTERVALLE SEMI-OUVERT

**DÉFINITION 3** – *Intégrale généralisée sur un intervalle semi-ouvert*

Soient  $(a, b) \in \overline{\mathbb{R}}^2$  tels que  $-\infty \leq a < b \leq +\infty$ .

- Soit  $f : [a, b[ \rightarrow \mathbb{K}$  une fonction continue par morceaux sur  $[a, b[$ .  
On dit que l'intégrale généralisée (ou impropre)  $\int_a^b f$  converge si la limite  $\lim_{x \rightarrow b^-} \int_a^x f$  existe et est finie.  
Cette limite est alors notée  $\int_a^b f$  ou  $\int_a^b f(t) dt$  ou encore  $\int_{[a, b[} f$ .
- Soit  $f : ]a, b] \rightarrow \mathbb{K}$  une fonction continue par morceaux sur  $]a, b]$ .  
On dit que l'intégrale généralisée (ou impropre)  $\int_a^b f$  converge si la limite  $\lim_{x \rightarrow a^+} \int_x^b f$  existe et est finie.  
Cette limite est alors notée  $\int_a^b f$  ou  $\int_a^b f(t) dt$  ou encore  $\int_{]a, b]} f$ .

**VOCABULAIRE** Si la limite en jeu n'existe pas ou n'est pas finie, on dit que l'intégrale *diverge*.

Étudier la *nature* d'une intégrale généralisée, c'est étudier si elle est convergente ou divergente.

 **EXEMPLES 3**

Étudier la nature et donner la valeur en cas de convergence des intégrales suivantes :

$$(1) \int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2} \quad (2) \int_0^1 \frac{dt}{(1-t)^2} \quad (3) \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{t}} \quad (4) \int_0^{+\infty} \cos(t) dt$$

 **EXEMPLE 4**

On cherche à étudier si, pour que l'intégrale  $\int_1^{+\infty} f$  converge, il est nécessaire et/ou suffisant que  $\lim_{+\infty} f = 0$ .

- (1) En donnant un contre-exemple, montrer que ce n'est pas suffisant.
- (2) On définit une fonction  $f$  sur  $[1, +\infty[$  en précisant qu'elle est nulle en dehors des segments  $[n, n+1/n^3]$  et affine sur  $[n, n+1/(2n^3)]$  et  $[n+1/(2n^3), n+1/n^3]$  avec  $f(n+1/(2n^3)) = n$ .  
Montrer que la condition proposée n'est pas nécessaire.

**PROPOSITION 7** – Cas des fonctions positives

Soient  $(a, b) \in \overline{\mathbb{R}}^2$  tels que  $-\infty \leq a < b \leq +\infty$ .

- Soit  $f : [a, b[ \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue par morceaux sur  $[a, b[$  et positive.  
L'intégrale  $\int_a^b f$  converge si et seulement si la fonction  $x \mapsto \int_a^x f$  est majorée sur  $[a, b[$ .
- Soit  $f : ]a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue par morceaux sur  $]a, b]$  et positive.  
L'intégrale  $\int_a^b f$  converge si et seulement si la fonction  $x \mapsto \int_x^b f$  est majorée sur  $]a, b]$ .

## II. 2. INTÉGRALES DE RÉFÉRENCE

**PROPOSITION 8** – Intégrales de Riemann

Soit  $\alpha \in \mathbb{R}$ .

- Sur  $[1, +\infty[$ : L'intégrale  $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha}$  converge si et seulement si  $\alpha > 1$ .
- Sur  $]0, 1]$ : L'intégrale  $\int_0^1 \frac{dt}{t^\alpha}$  converge si et seulement si  $\alpha < 1$ .

**PROPOSITION 9** – Intégrale de l'exponentielle au voisinage de  $+\infty$

Soit  $\alpha \in \mathbb{R}$ . L'intégrale  $\int_0^{+\infty} e^{-\alpha t} dt$  converge si et seulement si  $\alpha > 0$ . Dans ce cas :

$$\int_0^{+\infty} e^{-\alpha t} dt = \frac{1}{\alpha}$$

**PROPOSITION 10** – Intégrale du logarithme népérien au voisinage de 0

L'intégrale  $\int_0^1 \ln(t) dt$  converge.

## II. 3. INTÉGRALE GÉNÉRALISÉE SUR UN INTERVALLE OUVERT

**DÉFINITION 4** – Intégrale généralisée sur un intervalle ouvert

Soient  $(a, b) \in \overline{\mathbb{R}}^2$  tels que  $-\infty \leq a < b \leq +\infty$  et  $f : ]a, b[ \rightarrow \mathbb{K}$  une fonction continue par morceaux sur  $]a, b[$ .

Un réel  $c \in ]a, b[$  étant fixé, on dit que l'intégrale généralisée (ou impropre)  $\int_a^b f$  converge si et seulement si les

deux intégrales  $\int_a^c f$  et  $\int_c^b f$  convergent. On pose alors :

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$$

Cette définition ne dépend pas du choix de  $c$ .

**VOCABULAIRE** Lorsque la condition précédente n'est pas vérifiée, on dit que l'intégrale *diverge*.

**NOTATION** L'intégrale  $\int_a^b f$ , encore une fois, peut aussi être notée  $\int_a^b f(t) dt$  ou  $\int_{]a,b[} f$ .

**CONVENTION** Comme dans le cas d'un segment, si  $(a, b) \in \overline{\mathbb{R}^2}$  vérifie  $a > b$ , que l'on intègre sur  $[a, b[$ ,  $]a, b]$  ou  $]a, b[$ , on pose, en cas de convergence,  $\int_a^b f = -\int_b^a f$  et on convient que  $\int_a^a f = 0$ .

**EXEMPLE 5**

Étudier la nature et donner la valeur en cas de convergence des intégrales suivantes :

(1)  $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2}$

(2)  $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|t|} dt$

(3)  $\int_{-\infty}^{+\infty} \sin(t) dt$

**REMARQUE** Dans la définition précédente, il faut bien traiter les deux intégrales **séparément**.

Par exemple,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_{-x}^x \sin(t) dt = 0$  alors que  $\int_{-\infty}^{+\infty} \sin(t) dt$  est divergente.

**PROPOSITION 11** – *Intégrales faussement impropres*

Soient  $(a, b) \in \overline{\mathbb{R}^2}$  tels que  $a < b$  et  $f : ]a, b[ \rightarrow \mathbb{K}$  une fonction continue par morceaux sur  $]a, b[$ .

Si la fonction  $f$  admet un prolongement continu  $\tilde{f}$  sur  $[a, b]$  alors l'intégrale généralisée  $\int_a^b f$  est convergente et vaut  $\int_a^b \tilde{f}$ .

**REMARQUE** Ce résultat est valable si la fonction  $f$  est définie sur un intervalle semi-ouvert  $]a, b]$  ou  $[a, b[$ .

**EXEMPLE 6**

Prouver que l'intégrale  $\int_0^1 \frac{\sin(t)}{t} dt$  est convergente.

**II. 4. PROPRIÉTÉS DES INTÉGRALES GÉNÉRALISÉES**

**PROPOSITION 12** – *Propriétés des intégrales généralisées*

Soient  $(a, b) \in \overline{\mathbb{R}^2}$  et  $f$  et  $g$  deux fonctions continues par morceaux sur un intervalle d'extrémités  $a$  et  $b$ .

■ **Linéarité :** Soit  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

Si les intégrales  $\int_a^b f$  et  $\int_a^b g$  convergent alors  $\int_a^b (\lambda f + g)$  aussi et :

$$\int_a^b (\lambda f + g) = \lambda \int_a^b f + \int_a^b g$$

■ **Relation de Chasles :** Soit  $c \in ]a, b[$ .

L'intégrale  $\int_a^b f$  converge si et seulement si les intégrales  $\int_a^c f$  et  $\int_c^b f$  convergent et dans ce cas :

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$$

**PROPOSITION 13** – *Positivité, croissance et nullité*

Soient  $(a, b) \in \overline{\mathbb{R}}^2$  et  $f$  et  $g$  deux fonctions continues par morceaux sur un intervalle  $I$  d'extrémités  $a$  et  $b$ .

- **Positivité** : Si  $f \geq 0$  sur  $I$  et si  $a \leq b$  alors  $\int_a^b f \geq 0$ .
- **Croissance** : Si  $f \leq g$  sur  $I$  et si  $a \leq b$  alors  $\int_a^b f \leq \int_a^b g$ .
- **Nullité** : Si  $f$  est continue et positive sur  $I$  et si  $\int_a^b f = 0$  alors  $f$  est nulle sur  $I$ .

**PROPOSITION 14** – *Intégrale généralisée d'une fonction complexe*

Soient  $(a, b) \in \overline{\mathbb{R}}^2$  et  $f$  une fonction continue par morceaux sur un intervalle d'extrémités  $a$  et  $b$  et à valeurs complexes.

L'intégrale  $\int_a^b f$  converge si et seulement si les intégrales  $\int_a^b \operatorname{Re}(f)$  et  $\int_a^b \operatorname{Im}(f)$  convergent et dans ce cas :

$$\int_a^b f = \int_a^b \operatorname{Re}(f) + i \int_a^b \operatorname{Im}(f)$$

## II. 5. CALCUL D'INTÉGRALES GÉNÉRALISÉES

**PROPOSITION 15** – *Crochet généralisé*

Soient  $(a, b) \in \overline{\mathbb{R}}^2$  et  $f$  une fonction continue sur un intervalle  $I$  d'extrémités  $a$  et  $b$ .

Si  $f$  admet une primitive  $F$  sur  $I$  alors  $\int_a^b f$  converge si et seulement si  $F$  admet des limites finies en  $a$  et  $b$ .

On écrit alors :

$$\int_a^b f = [F]_a^b = \lim_b F - \lim_a F$$

**REMARQUE** Bien sûr, si par exemple  $a \in I$ , alors  $\lim_a F = F(a)$ .

**EXEMPLE** On a  $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2} = [\operatorname{Arctan}]_{-\infty}^{+\infty} = \lim_{+\infty} \operatorname{Arctan} - \lim_{-\infty} \operatorname{Arctan} = \pi$ .

**THÉORÈME 1** – *Changement de variable, cas croissant*

Soient  $(a, b) \in \overline{\mathbb{R}}^2$  tels que  $-\infty \leq a < b \leq +\infty$  et  $f$  une fonction continue par morceaux sur  $]a, b[$ . On se donne  $(\alpha, \beta) \in \overline{\mathbb{R}}^2$  tels que  $-\infty \leq \alpha < \beta \leq +\infty$  et  $\varphi : ]\alpha, \beta[ \rightarrow ]a, b[$  une bijection de classe  $\mathcal{C}^1$  strictement croissante.

Alors  $f \circ \varphi$  est continue par morceaux sur  $] \alpha, \beta [$ , les intégrales  $\int_a^b f(t) dt$  et  $\int_\alpha^\beta f(\varphi(u))\varphi'(u) du$  sont de même nature et, en cas de convergence :

$$\int_a^b f(t) dt = \int_\alpha^\beta f(\varphi(u))\varphi'(u) du$$

**REMARQUES**

- Si  $\varphi : ] \alpha, \beta [ \rightarrow ] a, b [$  une bijection de classe  $\mathcal{C}^1$  strictement décroissante, on a un résultat analogue mais il faut échanger les bornes  $\alpha$  et  $\beta$  dans l'égalité vérifiée en cas de convergence :

$$\int_a^b f(t) dt = \int_\beta^\alpha f(\varphi(u))\varphi'(u) du$$

- Dans le contexte de ce théorème, on dit que l'on a réalisé le changement de variable  $t = \varphi(u)$ . Il faut remarquer que l'on exprime ainsi l'« ancienne variable »  $t$  en fonction la « nouvelle variable »  $u$ . En pratique, pour réaliser un changement de variable :
  - (1) On exprime l'« ancienne variable »  $t$  en fonction la « nouvelle variable »  $u$  sous la forme  $t = \varphi(u)$ .
  - (2) On vérifie que  $\varphi$  est bijective et de classe  $\mathcal{C}^1$  sur son domaine de définition (la stricte monotonie étant une conséquence de la continuité et de l'injectivité).
  - (3) On réalise le changement de variable dans l'intégrale  $\int_a^b f(t) dt$  :
    - On modifie les bornes  $a$  et  $b$  en regardant ce que vaut  $u$  lorsque  $t = \varphi(u) = a$  et  $t = \varphi(u) = b$ .
    - On remplace  $t$  par  $\varphi(u)$  dans l'intégrande  $f(t)$ .
    - On remplace  $dt$  par  $\varphi'(u) du$ .
  - (4) La nouvelle intégrale obtenue est, sous réserve de sa convergence, égale à celle de départ. Il reste donc à vérifier sa convergence pour que l'égalité soit bien valide.
- Bien entendu, le résultat précédent peut être appliqué sur des intervalles semi-ouverts  $]a, b]$  ou  $[a, b[$ .

 **EXEMPLE 7**

Établir que :

$$\int_0^{+\infty} e^{-\sqrt{t}} dt = 2$$

**PROPOSITION 16** – *Intégrales de Riemann sur un intervalle borné quelconque*

Soient  $a < b$  deux réels et  $\alpha \in \mathbb{R}$ .

Les intégrales  $\int_a^b \frac{dt}{(t-a)^\alpha}$  et  $\int_a^b \frac{dt}{(b-t)^\alpha}$  convergent si et seulement si  $\alpha < 1$ .

**THÉORÈME 2** – *Intégration par parties*

Soient  $(a, b) \in \overline{\mathbb{R}}^2$  et  $f$  et  $g$  deux fonctions de classe  $\mathcal{C}^1$  sur un intervalle d'extrémités  $a$  et  $b$ .

Si le produit  $fg$  admet des limites finies en  $a$  et en  $b$  alors les intégrales  $\int_a^b f'g$  et  $\int_a^b fg'$  sont de même nature et, en cas de convergence :

$$\int_a^b f'g = [fg]_a^b - \int_a^b fg'$$

**REMARQUE** Le résultat ci-dessus permet de réaliser une intégration par parties directement sur des intégrales généralisées, sous réserve de bien en vérifier les hypothèses. En pratique, il est tout à fait possible de s'en passer en réalisant l'intégration par parties sur un segment puis en passant à la limite.

 **EXEMPLE 8**

Montrer que l'intégrale suivante converge et donner sa valeur :

$$\int_1^{+\infty} \frac{\ln(t)}{t^2} dt$$



## II. 6. CONVERGENCE ABSOLUE DES INTÉGRALES GÉNÉRALISÉES, INTÉGRABILITÉ

### DÉFINITION 5 – Convergence absolue d'une intégrale généralisée

Soient  $(a, b) \in \overline{\mathbb{R}}^2$  tels que  $-\infty \leq a < b \leq +\infty$  et soit  $f$  une fonction continue par morceaux sur un intervalle d'extrémités  $a$  et  $b$ .

On dit que l'intégrale  $\int_a^b f$  converge absolument si l'intégrale  $\int_a^b |f|$  converge.

### THÉORÈME 3 – La convergence absolue implique la convergence

Soient  $(a, b) \in \overline{\mathbb{R}}^2$  tels que  $-\infty \leq a < b \leq +\infty$  et soit  $f$  une fonction continue par morceaux sur un intervalle d'extrémités  $a$  et  $b$ .

Si l'intégrale  $\int_a^b f$  converge absolument alors elle converge. De plus, on a :

$$\left| \int_a^b f \right| \leq \int_a^b |f|$$

**REMARQUE** La réciproque est fautive. Un exemple sera étudié en exercice.

### DÉFINITION 6 – Intégrabilité

Soient  $(a, b) \in \overline{\mathbb{R}}^2$  tels que  $-\infty \leq a < b \leq +\infty$  et  $f$  une fonction continue par morceaux sur un intervalle  $I$  d'extrémités  $a$  et  $b$ .

On dit que la fonction  $f$  est *intégrable* sur  $I$  si l'intégrale  $\int_a^b |f|$  converge absolument.

**REMARQUE** Lorsque  $f$  est de signe constant sur l'intervalle  $I$ , l'intégrabilité de  $f$  sur  $I$  équivaut à la convergence de l'intégrale généralisée associée à  $f$  sur  $I$ .

### THÉORÈME 4 – Théorème de comparaison

Soient  $(a, b) \in \overline{\mathbb{R}}^2$  tels que  $-\infty \leq a < b \leq +\infty$  et  $f$  et  $g$  deux fonctions continues par morceaux sur  $[a, b[$ .

- Si  $|f| \leq |g|$  sur  $[a, b[$  alors l'intégrabilité de  $g$  sur  $[a, b[$  implique celle de  $f$  sur  $[a, b[$ .
- Si  $f \sim g$  au voisinage de  $b$ , alors l'intégrabilité de  $g$  sur  $[a, b[$  équivaut à celle de  $f$  sur  $[a, b[$ .


**REMARQUE** Le théorème de comparaison peut être utilisé pour montrer la convergence d'une intégrale puisque l'intégrabilité implique la convergence.

Lorsque les fonctions considérées sont positives, l'intégrabilité équivaut à la convergence de l'intégrale généralisée et le théorème de comparaison prend la forme suivante :

### THÉORÈME 5 – Théorème de comparaison pour les fonctions à valeurs positives

Soient  $(a, b) \in \overline{\mathbb{R}}^2$  tels que  $-\infty \leq a < b \leq +\infty$  et  $f$  et  $g$  continues par morceaux et positives sur  $[a, b[$ .

- Si  $f \leq g$  sur  $[a, b[$  alors la convergence de l'intégrale  $\int_a^b g$  implique la convergence de  $\int_a^b f$ .
- Si  $f \sim g$  au voisinage de  $b$ , alors  $\int_a^b f$  et  $\int_a^b g$  sont de même nature.

 **MÉTHODE** – Comparaison à une intégrale de Riemann

- **Sur  $[a, +\infty[$ :** Soit  $f : [a, +\infty[ \rightarrow \mathbb{K}$  une fonction continue par morceaux sur  $[a, +\infty[$  avec  $a \in \mathbb{R}$ .  
S'il existe  $\alpha > 1$  tel que  $t^\alpha f(t) \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} 0$  alors l'intégrale  $\int_a^{+\infty} f(t) dt$  converge (absolument).
- **Sur  $]0, a]$ :** Soit  $f : ]0, a] \rightarrow \mathbb{K}$  une fonction continue par morceaux sur  $]0, a]$  avec  $a > 0$ .  
S'il existe  $\alpha < 1$  tel que  $t^\alpha f(t) \xrightarrow[t \rightarrow 0^+]{} 0$  alors l'intégrale  $\int_0^a f(t) dt$  converge (absolument).

 **EXEMPLES 9**

Étudier la convergence absolue et la convergence des intégrales suivantes :

(1)  $\int_1^{+\infty} \frac{\sin(\ln t)}{t^2} dt$       (2)  $\int_0^{+\infty} \frac{t+1}{t^4+1} dt$       (3)  $\int_0^1 \frac{\ln t}{\sqrt{t}} dt$       (4)  $\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt$

## II. 7. ESPACES FONCTIONNELS ET INTÉGRABILITÉ

Dans cette partie,  $I$  désigne un intervalle de  $\mathbb{R}$ .

**PROPOSITION 17** – Espace des fonctions intégrables

L'ensemble  $\mathcal{L}^1(I, \mathbb{K})$  des fonctions continues par morceaux intégrables sur  $I$  est un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel.

**DÉFINITION 7** – Fonction de carré intégrable

Une fonction  $f$  continue par morceaux sur  $I$  est dite *de carré intégrable* si la fonction  $f^2$  est intégrable sur  $I$ .

 **EXEMPLES 10**

- (1) Sur  $[1, +\infty[$ , trouver un exemple de fonction qui est de carré intégrable mais non intégrable.
- (2) Sur  $]0, 1]$ , trouver un exemple de fonction qui est intégrable mais pas de carré intégrable.

**PROPOSITION 18** – Produit de fonctions de carré intégrable

Le produit de deux fonctions continues par morceaux de carré intégrable sur  $I$  est intégrable sur  $I$ .

**PROPOSITION 19** – Espace des fonctions de carré intégrable

L'ensemble  $\mathcal{L}^2(I, \mathbb{K})$  des fonctions continues par morceaux de carré intégrable sur  $I$  est un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel.

**PROPOSITION 20** – Inégalité de Cauchy-Schwarz

Soient  $f$  et  $g$  deux fonctions continues par morceaux de carré intégrable sur  $I$ . Alors :

$$\left| \int_I fg \right| \leq \left( \int_I |f^2| \right)^{\frac{1}{2}} \left( \int_I |g^2| \right)^{\frac{1}{2}}$$

### III. SUITES ET SÉRIES DE FONCTIONS INTÉGRABLES

#### III. 1. THÉORÈME DE CONVERGENCE DOMINÉE

Dans cette sous-partie, on donne des conditions suffisantes pour pouvoir échanger une limite et une intégrale. Plus précisément, si  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite de fonctions définies sur un intervalle  $I$  et à valeurs dans  $\mathbb{K}$ , on va donner des conditions permettant d'assurer la relation suivante :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_I f_n(t) dt = \int_I \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(t) dt$$

Il faut comprendre que ceci n'a rien d'automatique :

##### EXEMPLE 11

Pour  $n \in \mathbb{N}$  et  $x \in \mathbb{R}_+^*$ , on pose  $f_n(t) = ne^{-nt}$ .

Déterminer la limite simple  $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n$  de la suite  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  sur  $\mathbb{R}_+^*$  et étudier si l'on a :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} f_n(t) dt = \int_0^{+\infty} \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(t) dt$$

#### THÉORÈME 6 – Théorème de convergence dominée

Soit  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de fonctions de  $\mathcal{F}(I, \mathbb{K})$ . On suppose que :

- Les fonctions  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  sont continues par morceaux sur  $I$  et la suite  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge simplement sur  $I$  vers une fonction  $f$  continue par morceaux sur  $I$ ;
- Il existe une fonction  $\varphi$  continue par morceaux et intégrable sur  $I$  à valeurs positives telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall t \in I, \quad |f_n(t)| \leq \varphi(t) \quad \text{(Hypothèse de domination)}$$

Alors les fonctions  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $f$  sont intégrables sur  $I$  et :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_I f_n = \int_I f$$

#### REMARQUES

- Dans l'hypothèse de domination, la fonction  $\varphi$  ne doit pas dépendre de  $n$ .
- L'hypothèse  $f$  continue par morceaux doit être vérifiée. En effet, il existe des suites de fonctions continues par morceaux qui convergent simplement vers une fonction qui n'est pas continue par morceaux.

##### EXEMPLES 12

Étudier les limites suivantes :

$$(1) \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} \frac{dt}{(1+nt)(1+t^2)}$$

$$(2) \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{\pi/2} \sin^n(t) dt$$

#### III. 2. SÉRIES DE FONCTIONS INTÉGRABLES

Dans cette sous-partie, on donne cette fois des conditions suffisantes pour pouvoir échanger une somme infinie et une intégrale. Plus précisément, si  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite de fonctions définies sur un intervalle  $I$  et à valeurs dans  $\mathbb{K}$ , on va donner des conditions permettant d'assurer la relation suivante :

$$\int_I \left( \sum_{n=0}^{+\infty} u_n \right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left( \int_I u_n \right)$$

Encore une fois, cet échange n'a *a priori* rien d'automatique.

### THÉORÈME 7 – Théorème d'intégration terme à terme

Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de fonctions de  $\mathcal{F}(I, \mathbb{K})$ . On suppose que :

- Les fonctions  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  sont continues par morceaux et intégrables sur  $I$ ;
- La série de fonctions  $\sum u_n$  converge simplement sur  $I$  et sa somme est continue par morceaux sur  $I$ ;
- La série  $\sum \left( \int_I |u_n| \right)$  converge.

Alors la fonction  $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$  est intégrable sur  $I$  et l'on a :

$$\int_I \left( \sum_{n=0}^{+\infty} u_n \right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left( \int_I u_n \right)$$

#### EXEMPLE 13

Démontrer que :

$$\int_0^{+\infty} \left( \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{-nt}}{\sqrt{n}} \right) dt = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{3/2}}$$

**REMARQUE** Lorsque le théorème d'intégration terme à terme ne s'applique pas ou peine à s'appliquer, on peut avoir recours au théorème de convergence dominée appliqué à la suite des sommes partielles de la série de fonctions.

#### EXEMPLE 14

Établir que :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \int_0^1 \frac{dt}{1+t^2}$$

## IV. INTÉGRALES À PARAMÈTRE

Dans cette partie, nous considérons des fonctions à valeurs dans  $\mathbb{K}$  définies sur  $I \times J$  où  $I$  et  $J$  sont des intervalles de  $\mathbb{R}$ . Le but est de donner des conditions suffisantes pour obtenir de la régularité sur la fonction :

$$x \mapsto \int_I f(t, x) dt$$

Ce type d'intégrale est appelée *intégrale à paramètre*, le paramètre étant la variable  $x$  sur laquelle on cherche à obtenir de la régularité. L'intervalle  $I$  d'intégration est quant à lui indépendant de la variable  $x$ .

### IV. 1. CONTINUITÉ D'UNE INTÉGRALE À PARAMÈTRE

#### THÉORÈME 8 – Théorème de continuité des intégrales à paramètre

Soit  $f$  une fonction définie sur  $I \times J$  où  $I$  et  $J$  sont des intervalles de  $\mathbb{R}$ . On suppose que :

- Pour tout  $t \in I$ , la fonction  $x \mapsto f(t, x)$  est continue sur  $J$ ;
- Pour tout  $x \in J$ , la fonction  $t \mapsto f(t, x)$  est continue par morceaux sur  $I$ ;
- Pour tout segment  $[a, b] \subset J$ , il existe une fonction  $\varphi$  continue par morceaux et intégrable sur  $I$  à valeurs positives telle que :

$$\forall x \in [a, b], \quad \forall t \in I, \quad |f(t, x)| \leq \varphi(t)$$

*Hypothèse de domination  
sur tout segment*

Alors la fonction  $x \mapsto \int_I f(t, x) dt$  est bien définie et continue sur  $J$ .

## REMARQUES

- **Dans l'hypothèse de domination, la fonction  $\varphi$  ne doit pas dépendre de  $x$ .**  
Par contre, elle dépend *a priori* du segment  $[a, b]$ .
- Cette hypothèse de domination sur tout segment peut être remplacée par une hypothèse de domination globale, c'est-à-dire l'existence d'une fonction  $\varphi$  continue par morceaux et intégrable sur  $I$  à valeurs positives telle que :

$$\forall x \in J, \quad \forall t \in I, \quad |f(t, x)| \leq \varphi(t)$$

*Hypothèse de domination globale*

Cette nouvelle hypothèse est bien sûr plus difficile à satisfaire que la précédente mais elle se révèle suffisante dans de nombreux cas simples.

## EXEMPLE 15

Étudier la continuité de la fonction  $g$  suivante :

$$\forall x > 0, \quad g(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{x+t} dt$$

## IV. 2. DÉRIVATION D'UNE INTÉGRALE À PARAMÈTRE

### THÉORÈME 9 – Théorème de dérivation des intégrales à paramètre

Soit  $f$  une fonction définie sur  $I \times J$  où  $I$  et  $J$  sont des intervalles de  $\mathbb{R}$ . On suppose que :

- Pour tout  $t \in I$ , la fonction  $x \mapsto f(t, x)$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $J$ ;
- Pour tout  $x \in J$ , la fonction  $t \mapsto f(t, x)$  est intégrable sur  $I$ ;
- Pour tout  $x \in J$ , la fonction  $t \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(t, x)$  est continue par morceaux sur  $I$ ;
- Pour tout segment  $[a, b] \subset J$ , il existe une fonction  $\varphi$  continue par morceaux et intégrable sur  $I$  à valeurs positives telle que :

$$\forall x \in [a, b], \quad \forall t \in I, \quad \left| \frac{\partial f}{\partial x}(t, x) \right| \leq \varphi(t)$$

*Hypothèse de domination sur tout segment*

Alors la fonction  $g : x \mapsto \int_I f(t, x) dt$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $J$  et :

$$\forall x \in J, \quad g'(x) = \int_I \frac{\partial f}{\partial x}(t, x) dt$$

**REMARQUE** Pour le théorème de dérivation des intégrales à paramètre, les mêmes remarques que pour le théorème de continuité des intégrales à paramètre peuvent être faites.

## EXEMPLE 16

On reprend l'étude de la fonction  $g$  suivante :

$$\forall x > 0, \quad g(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{x+t} dt$$

Prouver que  $g$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}_+^*$ .

### IV. 3. CLASSE $\mathcal{C}^k$ D'UNE INTÉGRALE À PARAMÈTRE

#### THÉORÈME 10 – Classe $\mathcal{C}^k$ des intégrales à paramètre

Soit  $f$  une fonction définie sur  $I \times J$  où  $I$  et  $J$  sont des intervalles de  $\mathbb{R}$ . On suppose que :

- Pour tout  $t \in I$ , la fonction  $x \mapsto f(t, x)$  est de classe  $\mathcal{C}^k$  sur  $J$ ;
- Pour tout  $x \in J$  et tout  $p \in \llbracket 0, k-1 \rrbracket$ , la fonction  $t \mapsto \frac{\partial^p f}{\partial x^p}(t, x)$  est intégrable sur  $I$ ;
- Pour tout  $x \in J$ , la fonction  $t \mapsto \frac{\partial^k f}{\partial x^k}(t, x)$  est continue par morceaux sur  $I$ ;
- Pour tout segment  $[a, b] \subset J$ , il existe une fonction  $\varphi$  continue par morceaux et intégrable sur  $I$  à valeurs positives telle que :

$$\forall x \in [a, b], \quad \forall t \in I, \quad \left| \frac{\partial^k f}{\partial x^k}(t, x) \right| \leq \varphi(t) \quad \text{Hypothèse de domination sur tout segment}$$

Alors la fonction  $g : x \mapsto \int_I f(t, x) dt$  est de classe  $\mathcal{C}^k$  sur  $J$  et, pour  $p \in \llbracket 1, k \rrbracket$ , on a :

$$\forall x \in J, \quad g^{(p)}(x) = \int_I \frac{\partial^p f}{\partial x^p}(t, x) dt$$

**REMARQUE** Pour le théorème de classe  $\mathcal{C}^k$  des intégrales à paramètre, les mêmes remarques que pour les deux théorèmes précédents peuvent être faites.

#### EXEMPLE 17

On reprend l'étude de la fonction  $g$  suivante :

$$\forall x > 0, \quad g(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{x+t} dt$$

Prouver que  $g$  est de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $\mathbb{R}_+^*$ .