DEVOIR À LA MAISON N°5

POUR LE LUNDI 7 DÉCEMBRE

EXERCICE

Dans la suite, on fixe $\alpha > 0$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on introduit la fonction u_n définie sur $[0,+\infty[$ par :

$$\forall x \geqslant 0, \quad u_n(x) = \frac{x}{n^\alpha(1+nx^2)}$$

On va commencer par étudier les modes de convergence de la série de fonctions $\sum u_n$.

1. Prouver que la série de fonctions $\sum u_n$ converge simplement sur $[0,+\infty[$.
2. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, calculer :

$$\sup_{x\in[0,+\infty[} |u_n(x)|$$

3. Démontrer que la série de fonctions $\sum u_n$ converge normalement sur $[0,+\infty[$ si et seulement si $\alpha > 1/2$.
4. Pour $0 < a < b$, prouver que la série de fonctions $\sum u_n$ converge normalement sur $[a,b]$.
5. Justifier que la série de fonctions $\sum u_n$ converge uniformément sur $[0,+\infty[$ si $\alpha > 1/2$.
6. On étudie maintenant la convergence uniforme dans le cas $\alpha \leqslant 1/2$. Pour ce faire, on pose :

$$\forall n \geqslant 0, \quad \forall x \in [0,+\infty[, \quad R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k(x)$$

   6.1. Pour $n \geqslant 0$ et $x \in [0,+\infty[$ établir que :

$$R_n(x) \geqslant \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{x}{\sqrt{2n}(1+kx^2)}$$

   6.2. En déduire que la série de fonctions $\sum u_n$ ne converge pas uniformément sur $[0,a]$ avec $a > 0$.

On introduit la fonction S définie sur $[0,+\infty[$ par :

$$\forall x \in [0,+\infty[, \quad S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$$

7. Pour tout $\alpha > 0$, prouver que S est continue sur $]0,+\infty[$.
8. Si $\alpha > 1/2$, montrer que S est continue sur $[0,+\infty[$.
9. On suppose maintenant que $\alpha \leqslant 1/2$ et on étudie la continuité de S au point 0. On fixe $x > 0$ et on introduit la fonction f_x définie sur $[1,+\infty[$ par :

$$\forall t \geqslant 1, \quad f_x(t) = \frac{x}{t^\alpha(1+tx^2)}$$

   9.1. Pour $N \in \mathbb{N}^*$, prouver que :

$$\int_1^{N+1} f_x(t)\,dt \leqslant \sum_{n=1}^{N} u_n(x)$$

   9.2. En déduire que, pour $N \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\int_1^{N+1} \frac{x}{\sqrt{t}(1+tx^2)}\,dt \leqslant \sum_{n=1}^{N} u_n(x)$$

9.3. Grâce au changement de variable $u = x\sqrt{t}$, calculer l'intégrale :

$$\int_1^{N+1} \frac{x}{\sqrt{t}(1+tx^2)}\,\mathrm{d}t$$

9.4. En déduire que : $\pi - 2\operatorname{Arctan} x \leqslant S(x)$.
Conclure que S n'est pas continue en 0.

DEVOIR À LA MAISON N°5★

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé, de dimension finie ou infinie, muni de la norme $\|.\|_E$. On appelle opérateur sur E tout endomorphisme T de E dans E tel que :

$$\exists M \geqslant 0, \quad \forall f \in E, \quad \|T(f)\|_E \leqslant M\|f\|_E \tag{1}$$

On note $\mathscr{L}(E)$ l'ensemble des opérateurs sur E. Dans la suite, on étudie :

- Le *spectre* de $T \in \mathscr{L}(E)$, qui est défini comme l'ensemble des réels λ tel que $T - \lambda \mathrm{Id}_E$ n'est pas bijectif. On note $\sigma(T)$ l'ensemble de ces réels.
- Le *spectre ponctuel* de $T \in \mathscr{L}(E)$, qui est défini comme l'ensemble des réels λ tel que $T - \lambda \mathrm{Id}_E$ n'est pas injectif. On note $\sigma_p(T)$ l'ensemble de ces réels.

Partie I — Étude d'un premier opérateur

Soit E l'ensemble des fonctions continues de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ muni de la norme $\|.\|_\infty$ dont on rappelle la définition :

$$\forall f \in E, \quad \|f\|_\infty = \sup_{x \in [0,1]} |f(x)|$$

On note T l'application définie sur E telle que :

$$\forall f \in E, \quad \forall x \in [0,1], \quad T(f)(x) = x f\left(\frac{x}{2}\right)$$

1. Montrer que $T \in \mathscr{L}(E)$.

2. Calculer la valeur minimale possible pour la constante M de la relation (1).

3. Déterminer Ker(T) et Im(T).

On se place à présent dans E muni de la norme $\|.\|_2$ dont on rappelle la définition :

$$\forall f \in E, \quad \|f\|_2 = \sqrt{\int_0^1 |f(x)|^2 \, \mathrm{d}x}$$

4. Reprendre la question **1** avec cette nouvelle norme pour E.

5. Reprendre la question **2** avec cette nouvelle norme pour E.

Pour cela, on pourra considérer la famille $(f_n)_{n\geqslant 2}$ d'éléments de E telle que pour tout $n \geqslant 2$:

- *f_n est affine par morceaux;*
- *$f_n(0) = f_n(\frac{1}{2} - \frac{1}{n}) = f_n(\frac{1}{2} + \frac{1}{n^2}) = f_n(1) = 0$ et $f_n(\frac{1}{2}) = 1$.*

Partie II — Premiers calculs de spectres

Soit $H = \ell^2(\mathbb{N})$, l'espace vectoriel des suites réelles de carré sommable :

$$\ell^2(\mathbb{N}) = \left\{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \ \sum_{n\geqslant 0} |u_n|^2 \text{ converge}\right\}$$

muni de la norme définie par :

$$\forall u \in H, \quad \|u\|_2 = \sqrt{\sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|^2}$$

On note S et V les applications de décalage à gauche et à droite définies par :

$$\forall (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in H, \qquad (S(u))_n = u_{n-1} \text{ si } n \geqslant 1 \text{ et } (Su)_0 = 0 \qquad \text{et} \qquad (V(u))_n = u_{n+1} \text{ si } n \geqslant 0$$

6. Montrer que S et V appartiennent à $\mathscr{L}(\mathrm{H})$.
7. Calculer le spectre ponctuel de S et V.

On se place à présent dans l'espace des suites réelles bornées $\mathrm{F} = \ell^\infty(\mathbb{N})$ muni de la norme :

$$\forall u \in \mathrm{F}, \quad \|u\|_\infty = \sup_{n\in\mathbb{N}} |u_n|$$

8. Reprendre la question **1** pour les applications S et V dans ce nouvel espace F.
9. Reprendre la question **2** pour les applications S et V dans F.
10. Calculer le spectre de S et V dans F.