DEVOIR À LA MAISON N°6

POUR LE LUNDI 4 JANVIER

EXERCICE – DIVERSES EXPRESSIONS DE $\ln(2)$

1. Rappeler, en précisant le rayon de convergence, le développement en série entière de la fonction définie sur l'intervalle $]-1,+\infty[$ par $x \mapsto \ln(1+x)$.

2. Montrer alors que $\ln(2) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k2^k}$.

3. **3.1.** Donner le rayon de convergence puis calculer la somme de la série entière $\sum_{k\geqslant 1} \frac{x^{k+1}}{k(k+1)}$.

3.2. En déduire la valeur de $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k(k+1)2^k}$.

4. **4.1.** Montrer que la série $\sum_{k\geqslant 1} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$ est convergente.

4.2. Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall x \in [0,1], \quad \left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^k \right| \leqslant \frac{1}{n+1}$$

4.3. En déduire que $\ln(2) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$.

PROBLÈME – ÉTUDE D'UNE INTÉGRALE SEMI-CONVERGENTE

Le but du problème est de s'intéresser à la convergence et à la valeur de l'intégrale suivante :

$$\mathrm{I} = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\, \mathrm{d}t$$

PARTIE I — CONVERGENCE DE I

1. On introduit la fonction φ suivante :

$$\forall t > 0, \quad \varphi(t) = \frac{\sin(t)}{t}$$

1.1. Vérifier que φ est prolongeable par continuité sur l'intervalle $[0,1]$.

1.2. On définit maintenant la fonction ϕ par :

$$\forall x > 1, \quad \phi(x) = \int_1^x \varphi(t)\, \mathrm{d}t$$

Montrer que l'on a :

$$\forall x > 1, \quad \phi(x) = \cos(1) - \frac{\cos(x)}{x} - \int_1^x \frac{\cos(t)}{t^2}\, \mathrm{d}t$$

1.3. Prouver que $\phi(x)$ tend vers une limite finie quand x tend vers $+\infty$.

1.4. Déduire de ces résultats que l'intégrale I est bien convergente.

Partie II — Valeur de I

Dans la suite, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose :

$$u_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(t)\sin(2nt)}{\sin(t)}\,\mathrm{d}t \qquad \text{et} \qquad v_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(2nt)}{t}\,\mathrm{d}t$$

2. **2.1.** Vérifier que u_n et v_n existent pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

2.2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. En calculant $u_{n+1} - u_n$, montrer que u_n est indépendante de n et donner sa valeur.

3. Soit h une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur un segment $[\alpha,\beta]$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$. On pose, pour tout $m \in \mathbb{N}$:

$$\mathrm{H}_m = \int_\alpha^\beta h(t)e^{imt}\,\mathrm{d}t$$

Montrer, en utilisant une intégration par parties, que $\lim\limits_{m\to+\infty} \mathrm{H}_m = 0$.

4. On introduit maintenant la fonction h définie par :

$$\forall t \in \left]0, \tfrac{\pi}{2}\right], \quad h(t) = \frac{1}{t} - \frac{\cos(t)}{\sin(t)}$$

Prouver que g est prolongeable en une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

5. **5.1.** Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} (v_n - u_n)$.

5.2. En déduire finalement la valeur de I.

Partie III — Calcul d'une dernière intégrale

On s'intéresse dans cette dernière partie à l'intégrale suivante :

$$\mathrm{J} = \int_0^{+\infty} \frac{\sin^2(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t$$

6. Montrer que l'intégrale J est convergente.

7. En s'inspirant de la question **1.2**, démontrer que :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t$$

8. En déduire la valeur de J.
On pourra réaliser le changement de variable $t = 2x$ dans l'intégrale de droite de la relation précédente.

DEVOIR À LA MAISON N°6 ★

Soit E un ensemble non vide. On appelle *partition* de E tout ensemble $\mathscr{U} = \{A_1, \dots, A_k\}$ de parties de E tel que :

- Chaque A_i, pour $i \in [\![1, k]\!]$, est une partie *non vide* de E ;
- Les parties $A_1, \dots, A_k$ sont *deux à deux disjointes* ;
- la réunion des A_i forme E tout entier : $E = \cup_{i=1}^{k} A_i$.

Si $\mathscr{U}$ une partition de E et si k est le nombre d'éléments de $\mathscr{U}$, on dit aussi que $\mathscr{U}$ une *partition de* E *en* k *parties*.

Partie I — Étude du nombre de partitions

1. Soit k et n deux entiers strictement positifs.
Montrer qu'il n'existe qu'un nombre fini de partitions de l'ensemble $[\![1, n]\!]$ en k parties.

Dans tout le problème, pour tout couple (n, k) d'entiers strictement positifs, on note $S(n, k)$ le nombre de partitions de l'ensemble $[\![1, n]\!]$ en k parties. On pose de plus $S(0, 0) = 1$ et, pour tout $(n, k) \in \mathbb{N}^{*2}$, $S(n, 0) = S(0, k) = 0$.

2. On donne quelques expressions des nombres $S(n, k)$.

2.1. Exprimer $S(n, k)$ en fonction de n ou de k lorsque $k > n$.

2.2. Exprimer $S(n, k)$ en fonction de n ou de k lorsque $k = 1$.

3. Montrer que pour tous k et n entiers strictement positifs, on a :

$$S(n, k) = S(n-1, k-1) + kS(n-1, k)$$

On pourra distinguer les partitions de $[\![1, n]\!]$ *selon qu'elles contiennent ou non le singleton* $\{n\}$.

Partie II — Les nombres de Bell

Dans toute la suite, on pose pour tout entier $n \geqslant 0$:

$$B_n = \sum_{k=0}^{n} S(n, k)$$

4. Montrer que, pour $n \geqslant 1$, B_n est égal au nombre total de partitions de l'ensemble $[\![1, n]\!]$.

5. Démontrer la formule :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad B_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_k$$

6. Montrer que la suite $(B_n / n!)_{n \in \mathbb{N}}$ est majorée par 1.

7. En déduire une minoration du rayon de convergence R de la série entière $\sum_{n \geqslant 0} B_n z^n / n!$.

Pour $x \in]-R, R[$, on pose :

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{B_n}{n!} x^n$$

8. Montrer que :

$$\forall x \in]-R, R[, \quad f'(x) = e^x f(x)$$

9. En déduire une expression de la fonction f sur $]-R, R[$.

Partie III — Étude d'une suite de polynômes

On définit la suite de polynômes $(H_k)_{k\in\mathbb{N}}$ dans $\mathbb{R}[X]$ par :

$$H_0(X) = 1 \qquad \text{et} \qquad \forall k \in \mathbb{N}^*, \quad H_k(X) = X(X-1)\cdots(X-k+1)$$

10. Montrer que la famille $(H_0, \dots, H_n)$ est une base de l'espace $\mathbb{R}_n[X]$.

11. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, établir une expression simplifiée de $H_{k+1}(X) + kH_k(X)$.

12. En déduire que, pour tout entier naturel n, on a :

$$X^n = \sum_{k=0}^{n} S(n,k) H_k(X)$$

13. Soit $k \in \mathbb{N}$. On introduit les fonctions :

$$f_k : x \mapsto \sum_{n=k}^{+\infty} S(n,k) \frac{x^n}{n!} \qquad \text{et} \qquad g_k : x \mapsto \frac{(e^x-1)^k}{k!}$$

13.1. Prouver que f_k est définie sur $]-1, 1[$.

13.2. Pour $k \geqslant 1$, montrer que la fonction g_k vérifie l'équation différentielle :

$$y' = \frac{(e^x-1)^{k-1}}{(k-1)!} + ky$$

13.3. En déduire que :

$$\forall x \in]-1, 1[, \quad \frac{(e^x-1)^k}{k!} = \sum_{n=k}^{+\infty} S(n,k) \frac{x^n}{n!}$$

14. Pour $x \in]-1, 1[$ et $\alpha \in \mathbb{R}$, simplifier la somme :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} H_k(\alpha) \frac{x^k}{k!}$$

15. Montrer que pour $u < \ln 2$, on a :

$$e^{u\alpha} = \sum_{k=0}^{+\infty} H_k(\alpha) \frac{(e^u-1)^k}{k!}$$